

文章编号:1000 - 582X(2003)10 - 0039 - 03

# Laplace 方程的 Galerkin 边界元解法\*

张 洁<sup>1</sup>, 祝家麟<sup>2</sup>, 张 凯<sup>2</sup>

(1. 解放军后勤工程学院 基础部, 重庆 400016; 2. 重庆大学 数理学院, 重庆 400044)

**摘 要:** Galerkin 方法是基于变分原理基础上的一种把微分方程或积分方程转化为等价的变分方程, 通过离散变分方程求原方程数值解的数值计算方法。把 Laplace 方程的边值问题转化为边界积分方程后, 通过与边界积分方程等价的变分形式, 采用线性单元, 利用 Galerkin 边界元方法求解。在计算单元刚度矩阵时, 对二重积分的第一重使用精确积分, 第二重使用数值积分, 从而有效克服了奇异积分的计算, 数值算例验证了 Galerkin 方法误差的理论结果。

**关键词:** Galerkin 方法; Laplace 方程; 边界元

**中图分类号:** O241. 82

**文献标识码:** A

最典型也最简单的椭圆型偏微分方程是调和方程, 又称 Laplace 方程。力学和物理学研究中的许多问题都归结为 Laplace 方程的边值问题。例如: 弹性膜的平衡问题, 稳定状态的热传导问题, 不可压缩势流问题, 静电场问题以及静磁场问题。这些问题虽然有完全不同的物理背景, 却往往导致完全相同的数学表达式。许多学者都用有限元法, 边界元法中的配点法以及其它方法对该问题进行过各种研究。笔者拟利用 Galerkin 边界元方法对该问题加以研究, 并在数值离散时采用 Lagrange 乘子法。

Galerkin 方法是基于变分原理基础上的一种把微分方程或积分方程转化为等价的变分方程, 通过离散变分方程求原方程数值解的数值计算方法。由于在边界元方法中, 边界积分方程的近似计算方法及其相应的分析一般都基于边界积分方程的弱形式或变分公式, 因此, 用 Galerkin 方法比用配点法更便于进行理论分析, 比如解的存在唯一性、近似解的收敛性及误差估计等<sup>[1]</sup>。近些年来, 在工程计算中, 几乎所有的应用性质的边界元著作都只介绍了配点法, 尚未见采用线性单元, 通过 Galerkin 方法求解 Laplace 方程的正式报道。笔者采用 Lagrange 乘子法放松对构造插值基函数的约束要求, 把对密度函数的约束条件纳入边界积分方程中, 并且详细推导了线性单元情况下第一重积分的解析表达式, 第二重积分采用了 Gauss 数值积分, 确

保了计算的精度。数值算例验证了理论推导的正确性。

## 1 边界积分方程及其变分形式

设  $\Omega$  是  $R^2$  中具有足够光滑边界  $\Gamma$  的单连通有界区域,  $\Omega'$  表示  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  在  $R^2$  中的补域。考虑如下 Laplace 方程的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \cup \Omega' \\ u(x)|_{\Gamma} = u_0(x) & x \in \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

由文献[1-2]知, 若  $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , 则问题(1)在  $H^1(\Omega) (W_0^1(\Omega'))$  中有唯一解。且其解可用单层位势表为:

$$u(y) = \int_{\Gamma} \sigma(x) u^*(x, y) ds_x + c \quad x \in \Omega \cup \Omega' \quad (2)$$

$$\text{同时还要满足约束条件} \int_{\Gamma} \sigma(x) ds_x = 0 \quad (3)$$

其中,  $c$  为一任意常数,  $u^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y|$

为 Laplace 方程的基本解,  $\sigma(x) = \frac{\partial u}{\partial n^-} - \frac{\partial u}{\partial n^+}$  为法向导数在穿越  $\Gamma$  时的跃度。

利用单层位势在穿越  $\Gamma$  时的连续性, 便可得到边界积分方程。

\* 收稿日期: 2003 - 05 - 08

基金项目: 重庆市科委应用基础研究项目(7327)

作者简介: 张洁(1973 -), 女, 陕西耀县人, 后勤工程学院讲师, 硕士, 主要从事边界元方法及其在工程中的应用研究。

$$\begin{cases} u_0(y) = \int_{\Gamma} \sigma(x) u^*(x,y) ds_x + c \\ \int_{\Gamma} \sigma(x) ds_x = 0 \end{cases} \quad x \in \Gamma \quad (4)$$

求解此边界积分方程(4)得到 $\sigma$ 和常数 $c$ 后,带入解的表达式(2),问题便可得到解决。

方程(4)两边同乘以 $\sigma'(y)$ ,然后在 $\Gamma$ 上积分,便得到变分方程:

$$\begin{cases} b(\sigma, \sigma') + \langle c, \sigma' \rangle = \langle \sigma', u_0 \rangle \\ \langle \sigma', 1 \rangle = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $b(\sigma, \sigma') = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \sigma(x) \sigma'(y) \ln |x-y| ds_x ds_y$ ,

$$\langle \sigma', u \rangle = \int_{\Gamma} \sigma(y) u_0(y) ds_y, \quad \langle c, \sigma' \rangle = \int_{\Gamma} \sigma(y) c ds_y$$

### 2 变分方程的离散及重积分的处理

对边界积分方程的变分形式(5),采用 Galerkin 方法进行单元离散,假设把边界离散为 $n$ 个单元,并采用线性单元<sup>[3-4]</sup>。

$$\text{设} \quad \sigma = \sum_{i=1}^n \varphi_i \sigma_i \quad (6)$$

$$\text{其中} \varphi_i = \begin{cases} \frac{1+\xi}{2} & x \in \Gamma_{i-1} \\ \frac{1-\xi}{2} & x \in \Gamma_i \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \text{为插值基函数, } \sigma_i \text{ 为节点 } i \text{ 处的待求值}$$

把式(6)带入变分方程(5)则得到

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} \sigma_i + a_{j,n+1} c = b_j \\ \sum_{j=1}^n a_{n+1,j} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}+\Gamma_i} \varphi_i \int_{\Gamma_{j-1}+\Gamma_j} \ln \frac{1}{|x-y|} \varphi_j ds_x ds_y, (i=1, 2\Lambda, n, j=1, 2\Lambda, n)$

$b_j = \int_{\Gamma_{j-1}+\Gamma_j} u_0 \varphi_j ds_y, a_{j,n+1} = a_{n+1,j} =$

$\frac{L(j-1) + L(j)}{2} (j=1, 2\Lambda, n) \quad L(j) (j=1, 2\Lambda, n)$  为各个单元的单元长度。

(注意,当 $i=1$ 时,  $\Gamma_{i-1} = \Gamma_n, L(i-1) = L(n)$ )

把上述线性代数方程组写成紧凑形式

$$AU = B \quad (8)$$

其中,  $A = [a_{ij}]_{(n+1) \times (n+1)} \quad U = \left\{ \begin{matrix} \sigma_j \\ c \end{matrix} \right\} \quad b = \left\{ \begin{matrix} b_j \\ 0 \end{matrix} \right\}$

当两个积分单元相临时,上述积分就存在奇异性的问题,若采用数值积分,必然产生较大的误差。为了避免出现这样的问题,在求二重积分时,第一重积分采

用精确积分,第二重积分采用 Gauss 数值积分。下面给出精确积分的计算公式。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|x-y|} \varphi_1 ds_x &= \frac{s_2}{s_2-s_1} \left[ s_2 \ln \frac{1}{r_2} - s_1 \ln \frac{1}{r_1} + s_2 - s_1 - d(\arctg \frac{s_2}{d} - \arctg \frac{s_1}{d}) \right] + \\ &\frac{1}{4(s_2-s_1)} [r_2^2(2\ln r_2 - 1) - r_1^2(2\ln r_1 - 1)] \\ \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|x-y|} \varphi_2 ds_x &= \frac{s_1}{s_2-s_1} \left[ s_1 \ln \frac{1}{r_1} - s_2 \ln \frac{1}{r_2} - s_2 + s_1 + d(\arctg \frac{s_2}{d} - \arctg \frac{s_1}{d}) \right] - \\ &\frac{1}{4(s_2-s_1)} [r_2^2(2\ln r_2 - 1) - r_1^2(2\ln r_1 - 1)] \end{aligned}$$

其中: $d$ 为源点到积分单元 $A_1, A_2$ 的距离; $r_1$ 为源点到单元端点 $A_1$ 的有向线段的长度; $r_2$ 为源点到单元端点 $A_2$ 的有向线段的长度; $s_1$ 为有向线段 $r_1$ 在 $A_1, A_2$ 的投影; $s_2$ 为有向线段 $r_2$ 在 $A_1, A_2$ 上的投影。

对于线性方程组的右端项,由于没有奇异性,可以方便地使用 Gauss 数值积分。

### 3 数值算例

例1 设 $\Omega$ 为单位圆外区域,  $u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{r} \cos\theta$

为 $\Omega$ 内的调和函数,  $u$ 在边界 $\Gamma$ 上的值  $u|_{\Gamma} = u(r, \theta)|_{r=1} = \cos\theta$ 。利用 Galerkin 方法编制程序,计算结果见表1(其中 $N$ 为所剖分的单元数目)。

表1 所得计算结果与精确解的比较

r	N				精确解 u
	8	16	32	64	
2.0	0.453 222 0	0.487 587 5	0.496 847 3	0.499 205 1	0.500
4.0	0.226 536 7	0.243 793 5	0.248 423 3	0.249 602 2	0.250
5.0	0.181 228 7	0.195 034 9	0.198 738 5	0.199 681 6	0.200
8.0	0.113 267 7	0.121 896 9	0.124 211 4	0.124 800 7	0.125
10.0	0.090 614 4	0.097 517 4	0.099 369 5	0.099 840 5	0.100

$u$ 随半径 $r$ 的变化情况见图1。

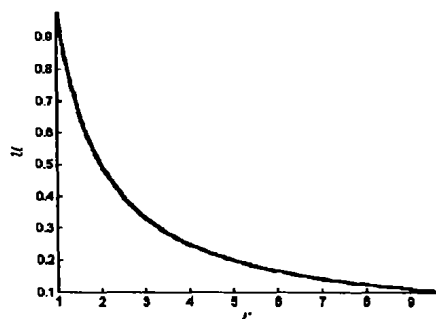


图1 例1中 $u$ 随半径 $r$ 的变化

从表 1 中的数据可以看出  $u$  的相对误差  $E(u)$  与单元线度  $h(h = \frac{1}{N}, N$  是单元数目) 有如下关系:

$$E(u) = O(h^2)$$

事实上,从图 2 可以看出,  $\ln E(u)$  与  $\ln h$  呈线性变化,直线的斜率近似等于 2。

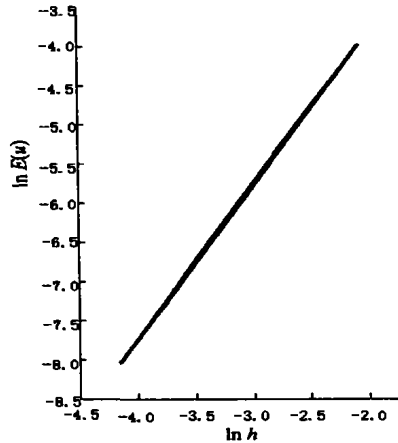


图 2 相对误差随剖分变化的情况

例 2 一个矩形断面的无限长棱柱,已经给出 4 个边上的不同温度值:在  $x = 0$  的表面上,  $T = 1$ ;在  $x = 10$  和  $y = \pm 4$  的 3 个表面上,  $T = 0$ 。求内部若干点处的温度值。

用本文的 Galerkin 方法计算,也获得了较好的结果。区域内若干点处的计算值与精确解的比较见表 2。

表 2 所得计算结果与精确解的比较

$x$	$y$	边界元解	精确解
1.0	0.0	0.756 122 70	0.756
5.0	0.0	0.174 099 80	0.174
9.0	0.0	0.020 213 38	0.020
2.0	2.0	0.434 360 90	0.434
8.0	2.0	0.030 851 66	0.031

$x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$  这 4 条直线上的计算结果见图 3。

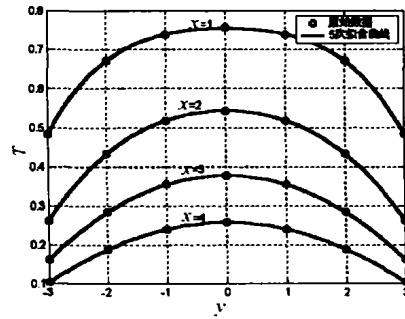


图 3 例 3 在  $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$  这 4 条直线上的温度分布

从上述 2 个算例可以看出,对第一重积分使用精确积分,很好地避免了奇异性,用较少的边界单元就能获得比较好的计算结果。

参考文献:

- [1] 祝家麟. 椭圆边值问题的边界元分析[M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [2] 张耀明. 平面 Poisson 外边值问题[J]. 应用力学学报, 2002, 19(1): 39-43.
- [3] 申光宪. 边界元法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.
- [4] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [5] 张太平, 祝家麟. 抛物型问题的边界元重叠型区域分解法[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2002, 25(2): 75-78.
- [6] BREBBIA C A. The boundary element method for engineers [M]. London: pentech press, 1978.

## Galerkin Boundary Element Method for Laplace Equation

ZHANG Jie<sup>1</sup>, ZHU Jia-lin<sup>2</sup>, ZHANG Ka<sup>2</sup>

(1. Department of Foundation studies, Logistical Engineering University, Chongqing 400016, China;  
2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** Galerkin method based on the variation principle is used to solve differential and integral equations. The boundary problem of Laplace equation is changed into the variational equation which is equivalent to the boundary integral equation. Using linear element, it is solved by Galerkin boundary element method. In computation of stiffness matrix, the exactly integral formula is used in the first order integral expression, The numerical integral formula is used in the second order integral expression. Thus the problem of calculation of double singular integral is carried out. The numerical experiments also prove this method is reliable. The error of Galerkin boundary element is tested with numerical experimentation.

**Key words:** galerkin method; laplace equation; boundary element method

(编辑 张 革)