文章编号:1000 - 582X(2003)10 - 0042 - 03

无穷维空间中非线性规划解的稳定性*

黄正刚[1], 李泽民[2]

(1. 重庆工学院 数理学院, 重庆 400050; 2. 重庆大学 数理学院, 重庆 400044)

摘　要:在无穷维空间中,目标函数和约束函数是一般连续函数情况下,给出了最优解和弱稳定、强稳定的定义,并对一般的非线性规划问题给出了其近似问题的解的稳定性充分条件。所得结论推广了 R^n 中的相关结论,从而使 R^n 中的相关结论应用到无穷维空间。

关键词:列紧集; 序 Hausdorff 空间; 弱稳定; 强稳定

中图分类号:O224　　　　**文献标识码**:A

1　预备知识

设 X,Y,Z 是序列式列紧[1] 的序 Hausdorff 空间,分别具有内部非空的正锥[2]。X_+,Y_+,Z_+, $X_+\neq X$, $Y_+\neq Y$, $Z_+\neq Z$, X_+,Y_+,Z_+ 各含有原点,且 X_+ 是闭凸锥。

$f:X\to Z$ 及 $g:X\to Y$ 是连续映射,T 是度量有界[3] 的列紧度量空间[3],$O\in T$。在本文中,总假定序 Hausdorff 空间 X,Y,Z 是度量化的。(在不致混淆的情况下,把 X,Y,Z 中的度量形式上都看作是 d,序[4] 看作都是 $\leqslant$, $<$)

假定非线性规划精确问题[5] 是

(p) $\min\limits_{x\in X_t} f(x,t)$,其中 $K_t=\{x\in X \mid -g(x)\in Y_+\}$

而近似问题[6] 为 $(\mathrm{p}_t)\min\limits_{x\in K_t} f(x,t)$,其中 $K_t=\{x\in X \mid -g(x,t)\in Y_+\}$, $t\in T$

定义1　设 $x^*\in K_0(K_t)$,如果对 $\forall x\in K_0(K_t)$, s.t. $f(x^*)\leqslant f(x)$

则说 x^* 是问题(p) ((p$_t$)) 的最优解。

规定,当 $t=0$ 时,(p$_0$) 就是(p),即 $f(x,0)=f(x)$, $g(x,0)=g(x)$。问题(p) 和问题(p$_t$) 的最优解分别记作 K_0^* 和 K_t^*。

定义2　如果

i) K_0 及 K_0^* 非空

ii) 对任给的 $\varepsilon>0$,总存在 $a>0$, s.t. 当 $t\in B_d^a(0)$ 时,K_t 及 K_t^* 非空

且 $d(f(x(t),t),f(x(0),0))<\varepsilon$,其中,$x(t)\in K_t^*$, $x(0)\in K_0^*$

则说问题(p$_t$) 是弱稳定的。(其中,$B_d^\varepsilon(0)=\{t\in T \mid d(t,o)<\varepsilon\}$)

iii) 若问题(p$_t$) 是弱稳定的,而且对满足 $t\in B_d^a(0)$ 的任意 t 和任意 $x(t)\in K_t^*$,总存在 $x(0)\in K_0^*$, s.t. $d(x(t),x(0))<\varepsilon$

则说问题(p$_t$) 是强稳定的。

2　解的稳定性

考虑问题(p$_t$) $\min\limits_{x\in K_t} f(x,t)$

假设Ⅰ) $f(x,t)$, $g(x,t)$ 对 (x,t) 是连续的。

Ⅱ) 对任意 $x^0\in K_0$ 及任给 $\delta>0$, ($\delta\in R$) 总存在 $x_\delta\in K_0$, s.t.

$d(x_\delta,x^0)<\delta$, $-g(x_\delta,0)\in Y_+$

定理3　在假设Ⅱ)之下,若 $g(x,t)$ 对 t 连续,则对任给的 $x^0\in K_0$ 及 $\delta>0$,必存在 $a>0$,当 $t\in B_d^a(0)$ 时,K_t 非空,且 $\exists x_\delta\in K_t$ s.t. $d(x_\delta,x^0)<\delta$。(其中 $a,\delta\in R$)

证明　由假设Ⅱ),对任给的 $x^0\in K_0$ 及 $\delta>0$,总存在 $x_\delta\in K_0$, s.t.

$$d(x_\delta,x^0)<\delta,\ g(x_\delta,0)<0$$

对满足 $g(x_\delta,0)+\varepsilon<0$ 的 $\forall\varepsilon$, ($\varepsilon>0$,且 $\varepsilon\in Y$)

$$-(g(x_\delta,0)+\varepsilon)\in \mathrm{int}Y_+$$

* 收稿日期:2003 - 05 - 08
作者简介:黄正刚(1972 -),男,四川渠县人,重庆工学院讲师,硕士,主要从事最优化问题的研究。

从而存在开集 $V \subset Y_+$, s.t. $-(g(x_\delta,0)+\varepsilon) \in V \subset Y_+$

由 $g(x,t)$ 对 t 的连续性，对上述 V，必存在原点0在度量空间 T 中的一个开邻域 U, s.t. $-(g(x_\delta,U)+\varepsilon) \subset V \subset Y_+$

即 $-(g(x_\delta,t)+\varepsilon) \in V \subset Y_+$, $\forall t \in U$。从而 $g(x_\delta,t) \leqslant -\varepsilon < 0$, $\forall t \in U$

即 $-g(x_\delta,t) \in Y_+$ $\forall t \in U$。故 $x_\delta \in K_t$

又 $0 \in U \subset T$，且 T 是度量有界的度量空间，所以必存在 $a > 0, (a \in R)$

s.t. $U = B_d^a(0)$，于是定理得证。

定理4　在假设 Ⅰ)、Ⅱ) 之下再设 $K_t^* \neq \Phi$, $(t \in T)$，若存在序列 $\{t^k\} \subset T$, $\lim\limits_k t^k = 0$，使 $x(t^k) \in K_{t^k}^*$ 且 $\lim\limits_k x(t^k) = \bar{x}$，则 $\bar{x} \in K_0^*$。

证明　任取满足 $\delta^k > 0$, $(\delta^k \in R)$ 且 $\lim\limits_k \delta^k = 0$ 的数列 $\{\delta^k\}$ 及任意 $x(0) \in K_0^*$，则由定理3，必 $\exists a_k > 0, (a_k \in R)$，当 $t \in B_d^{a_k}(0)$ 时，存在 $x_{\delta^k} \in K_t$，使 $\lim\limits_k x_{\delta_k} = x(0)$

因假设 $\lim\limits_k t^k = 0$，则由序列极限的定义，必存在子列 $\{t^{k_i}\} \subset \{t^k\}$，

s.t.　$t^{k_i} \in B_d^{a_k}(0)$, $\forall i$

因为 $\lim\limits_k x(t^k) = \bar{x}$，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N_0，当 $k > N_0$ 时，$d(x(t^k),\bar{x}) < \varepsilon$，由于 $\{k_i\}$ 是单调递增数列，故对上述的数 N_0，必 $\exists$ 下标 i_0，当 $i > i_0$ 时有 $k_i > N_0$，从而 $d(x(t^{k_i}),\bar{x}) < \varepsilon$, $\forall i > i_0$

所以 $\lim\limits_i x(t^{k_i}) = \bar{x}$

因 T 是度量空间，所以 T 是 Hausdorff 空间。于是，$\lim\limits_i t^{k_i} = \lim\limits_k t^k = 0$。

由 $x(t^{k_i}) \in K_{t^k}^*$, $f(x(t^{k_i},t^{k_i}) \leqslant f(x(0),0)$

即 $f(x(0),0) - f(x(t^{k_i}), t^{k_i}) \geqslant 0$，所以 $f(x(0),0) - f(x(t^{k_i}),t^{k_i}) \in Z_+$。

因为 Z_+ 是 Z 中的闭(凸锥)，所以 Z_+ 是列紧集，从而 $\{f(x(0),0) - f(x(t^{k_i}),t^{k_i})\}$ 存在一子列在 Z_+ 中收敛且极限唯一；不妨假设该子列就是 $\{f(x(0),0) - f(x(t^{k_i}),t^{k_i})\}$ 本身，于是对 i 取极限，则 $\lim(f(x(0),0) - f(x(t^{k_i}),t^{k_i})) \in Z_+$

即 $f(x(0),0) - \lim\limits_i f(x(t^{k_i}),t^{k_i}) \geqslant 0$

再注意到 $f(x,t)$ 对 x 与 t 的连续性，则有 $f(x(0),0) - f(\bar{x},0) \geqslant 0$，即 $f(x(0),0) \geqslant f(\bar{x},0)$

而 $x(0) \in K_0^*$，所以 $f(x(0),0) \leqslant f(\bar{x},0)$。从而 $f(x(0),0) = f(\bar{x},0)$

故 $\bar{x} \in K_0^*$

定理5　在假设 Ⅰ)、Ⅱ) 之下，若存在 $a > 0$，当 $t \in B_d^a(0)$ 时，$K_t^* \neq \Phi$ 且一致有界[6]，则问题(p_t) 强稳定。

证明　由假设，稳定性定义中的条件 i) 显然成立。下证条件 ii)、iii) 成立。

先验证条件 iii)。对任给的 $\varepsilon > 0$，作集合 $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{x(0)\in K_0^*} \{x \mid d(x,x(0)) < \varepsilon\}$ 则显然 $G_\varepsilon \subset X$ 为开集，且 $K_0^* \subset G_\varepsilon$。

不难看出，为证条件 iii) 成立，只须证明：存在 $\bar{a} > 0$, $(\bar{a} \in R)$，使得当 $t \in B_d^{\bar{a}}(0)$ 时，$K_t^* \subset G_\varepsilon$。(用反证法) 若不然，存在 $t^k \to 0$ $(k \to \infty)$ 的 $\{t^k\} \subset T$ 及 $x(t^k) \in K_{t^k}^*$，使 $x(t^k) \notin G_\varepsilon$。由假设，$K_t^* \neq \Phi$ 且一致有界，故存在与 t 无关的常数 $c > 0$，使 $d(x,o) \leqslant c, \forall x \in K_t^*$ $(t \in B_d^a(0))$。再作集合 $S = \{x \mid d(x,o) \leqslant 2(c+\varepsilon)\}$，则易知 $G_\varepsilon \subset S$，且 $x(t^k) \in S$。于是 $x(t^k) \in S \backslash G_\varepsilon$。

注意 $S \backslash G_\varepsilon$ 为 X 中的闭集，则 $S \backslash G_\varepsilon$ 为列紧集，故不妨设存在 $\bar{x} \in S \backslash G_\varepsilon$，使 $\lim\limits_k x(t^k) = \bar{x}$。于是由定理4，$\bar{x} \in K_0^*$，这与 $\bar{x} \notin G_\varepsilon$ 矛盾，从而条件 iii) 成立。

最后验证条件 ii)。由 $f(x,t)$ 在列紧集上的一致连续性，对上述的 $\varepsilon > 0$，必存在 $\delta > 0$, $a_1 > 0$, $(\delta, a_1 \in R)$，当 $t \in B_d^{a_1}(0)$, $x(t) \in B_d^\delta(x(0))$, $x(t) \in K_t^*$, $x(0) \in K_0^*$ 时，$d(f(x(t),t), f(x(0),0)) < \varepsilon$。

令 $\varepsilon_1 = \min(\delta,\varepsilon)$，则由前面证明了的条件 iii)，必存在 $a_2 > 0$，当 $t \in B_d^{a_2}(0)$ 时，存在 $x(0) \in K_0^*$，使 $d(x(t),x(0)) < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$。现取 $a_0 = \min(a_1, a_2, a)$，则当 $t \in B_d^{a_0}(o)$ 时，$d(f(x(t)),t), f(x(0),0)) < \varepsilon$ 及 $d(x(t),x(0)) < \varepsilon$ 成立。

即对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $a_0 > 0$，使条件 ii)、iii) 同时成立。于是，由定义知问题(p_t) 强稳定。

参考文献：

[1]　李孝传，陈玉清. 一般拓扑学导引[M]. 上海：人民教育出版社，1983. 56 – 58.

[2]　LI ZEMIN. The Optimality Conditions for Vector Optimization of Set – Valued Maps [J]. Journal of Mathematical Ananasis and Applications, 1999, 237: 413 – 424.

[3]　江泽涵. 拓扑学引论[M]. 上海：上海科技出版社，1984. 35 – 36.

[4]　李泽民. 线性拓扑空间中向量极值问题的广义 K – T 条件[J]. 系统科学与数学，1990, 10(1): 78 – 83.

[5]　林锉云，董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春：吉林教育出版社，1992. 270 – 272.

[6]　夏道行，杨亚立. 线性拓扑空间引论[M]. 上海：上海科技出版社，1986. 72 – 73.

Steadility of solutions of nonlinear programming problems in infinite dimensional spaces

HUANG Zheng-gang[1], *LI Ze-min*[2]

(1. School of Mathematics & Physics of Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400050, China;

2. College of Mathematics & Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: We give the approximate problems of nonlinear programming problems of which objective function and constrained function are continuous, and definitions of an optimall solution and strong(weak) steadility. Then, the sufficient conditions of steadility of its solutions are obtained. Finally, the conclusions in this paper generalize those conclusions in space R^n, thus, the later can be applicated in infinite demensinal space.

Key words: tightarrayed set; ordered hausdorff space; weak steady; strong steady

(编辑 张 苹)

(上接第 33 页)

Electrochemical Properties and Application of the Modified Carbon Nanotubes

HU Chen-guo[1], *ZHU Wei*[2], *WANG Wan-lu*[1], *LIAO Ke-jin*[1]

(1. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. College of Chemistry and Chemical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The end of carbon nanotubes are opened and functional groups are successfully fixed on them using chemical method, which was characterized by TEM image and IR spectra. Electrochemical behavior is conducted by cyclic voltammetry both on raw carbon nanotube electrode and carboxyl – modified carbon nanotube electrode in 1 mmol/L Fe^{2+} + 0.2 mol/L HClO4. The results show that the chemical properties of carbon nanotube are improved and the electrochemical activity of carbon nanotube is greatly enhanced after chemical treatment. The experiments also reveal significant electrocatalytic behaviors toward the redox of dopamine on the carboxyl – modified carbon nanotube electrode.

Key words: carbon nanotube; functional group; cyclic voltammetry; dopamine

(编辑 张 苹)