

文章编号:1000-582X(2003)10-0104-04

# 一类离散非线性系统在不同系统参数下的混沌同步\*

周平

(重庆邮电学院 光电工程学院,重庆 400065)

**摘要:**由参数自适应控制和变量驱动原理,对于一类离散非线性混沌系统,提出了实现在不同参数情况下混沌同步的一种方法。在参数自适应控制方程中,控制系数可以是同一个混沌系统的相同系统参数状态下或不同系统参数状态下的混沌信号。常见的参数自适应控制方法中要求控制系数为常量,而在这里可以是变量,甚至是混沌信号,所以,该控制方法更具有普遍性,即常见的参数自适应控制方法是本文方法的一个特例。数值模拟计算表明,此方法对于一类系统是可行的。

**关键词:**离散非线性混沌系统;不同参数;混沌同步

**中图分类号:**TP273

**文献标识码:**A

混沌同步是混沌控制领域中一个极其诱人的课题,由于具有巨大的应用潜力,引起了国内外的极大关注与兴趣<sup>[1-7]</sup>。因混沌系统对初始条件的敏感依赖性,即使两个系统参数完全相同的混沌系统,当它们的初始条件有一个微小差别时,它们的轨迹也会出现“差之毫厘失之千里”的现象。而在实际应用中,由于外部的干扰和噪音的作用,要使两个混沌系统的参数完全相同是很难的,所以两个不同参数混沌系统的同步问题在实际应用中具有重要意义。

笔者对于一类离散非线性混沌系统,提出了实现在不同参数情况下系统同步的方法,将本文方法应用于混沌 Logistic、Kawakam 和 Henon 系统,模拟计算结果表明,本文方法是可行的。

## 1 基本理论

研究如下  $N$  维离散非线性混沌系统

$$x(n+1) = f[x(n), \mu] \quad (1)$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ ,  $\mu$  为系统参数(不同参数情况下系统可能处于稳定状态或混沌状态), (1) 中所有变量为实数。当系统参数取  $\mu'$  时,有如下混沌系统

$$y(n+1) = f[y(n), \mu'] \quad (2)$$

其中  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ , 所有变量为实数。若存在  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_i(n) - y_i(n)| = 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ , 则称系统

(1) 和系统(2) 达到了同步。众所周知,即使  $\mu = \mu'$ , 若两个混沌系统的初始条件有一个微小差别,它们的轨迹都不能达到同步,即不可能实现系统(1) 和系统(2) 的混沌同步。

为实现系统(1) 和系统(2) 在不同系统参数时的混沌同步,现对系统(2) 做如下参数控制,得到系统(3)

$$\left. \begin{aligned} y(n+1) &= f[y'(n), x_i(n), \mu(n)], 1 \leq l \leq N \\ \mu(n+1) &= \mu(n) + \sum_{i=1}^N r_i(n) [y_i(n) - x_i(n)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中  $y'(n) = (y_1, y_2, y_{l-1}, y_{l+1}, \dots, y_N)$ ,  $r_i(n)$  来自系统(1) 的混沌信号(可以是系统(1) 在其它系统参数时的混沌信号),  $x_i(n)$  为驱动信号。若存在  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_i(n) - y_i(n)| = 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ , 则系统(1) 和系统(3) 达到了同步,称实现了系统(1) 在不同参数情况下的混沌同步。

定义  $e_i(n) = y_i(n) - x_i(n) (i = 1, 2, \dots, N)$ ,  $e_\mu(n) = \mu(n) - \mu$ , 可得系统(3) 和(1) 的误差系统为

$$e_i(n+1) = f_i[x_1(n) + e_1(n), \dots, x_N(n) + e_N(n), \mu_1 + e_\mu(n), \mu_2, \dots, \mu_m] -$$

\* 收稿日期:2003-04-25

作者简介:周平(1965-),男,四川内江人,重庆邮电学院副教授,硕士,研究方向为非线性控制和应用。

$f_i[x_1(n), \dots, x_N(n), \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m] (i = 1, 2, \dots, N)$ ,  
 $e_\mu(n+1) = e_\mu(n) + \sum_{i=1}^N r_i(n)e_i(n)$ , 显然  $e_i(n) = 0$ ,  
 $e_\mu = 0$  是误差系统的不动点, 将误差系统在上述不动点处展开, 取线性近似可得:

$$\begin{cases} e_i(n+1) = \frac{\partial f_i}{\partial \mu} e_\mu(n) + \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} e_j(n) \\ i = 1, 2, \dots, N \\ e_\mu(n+1) = e_\mu(n) + \sum_{i=1}^N r_i(n)e_i(n) \end{cases}$$

或

$$\begin{bmatrix} e_1(n+1) \\ \dots \\ e_N(n+1) \\ e_\mu(n+1) \end{bmatrix} = J(n) \begin{bmatrix} e_1(n) \\ \dots \\ e_N(n) \\ e_\mu(n) \end{bmatrix}$$

式中的  $J(n)$  由上面的线性近似可以很容易得到。

可见当选择合适的驱动变量  $x_i(n)$  和混沌信号  $r_i(n)$ , 若使得  $J(n)$  的特征值的模小于 1 (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(n)J(n-1)\dots J(0) = 0$ ), 则存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_i(n) - y_i(n)| = 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ , 即系统(1)和系统(3)达到了同步, 我们称实现了系统(1)在不同参数情况下的同步。由于加入了混沌信号  $r_i(n)$ , 可见在实际应用中要实现系统(1)和系统(3)的混沌同步是很灵活和方便的。

## 2 应用举例

为验证文中思想对于一类系统是可行的, 下面以几个具体混沌系统为例进行数值计算。

### 2.1 混沌 Logistic 系统在不同系统参数下的混沌同步

混沌 Logistic 系统形如系统(4)

$$x(n+1) = \mu x(n)[1 - x(n)] \quad (4)$$

其中  $3.57 \leq \mu \leq 4$ , 为实现系统(4)在不同系统参数  $\mu$  时的混沌同步, 现对系统(4)做如下参数控制, 得到系统(5)

$$\left. \begin{aligned} y(n+1) &= \mu(n)x(n)[1 - x(n)] \\ \mu(n+1) &= \mu(n) + r(n)[y(n) - x(n)] \end{aligned} \right\} (5)$$

当选择  $r(n)$  来源于系统(4)的混沌信号  $x(n)$  或者系统(4)在不同系统参数时的混沌信号  $s(n)$  时 ( $s(n)$  为 Logistic 系统在其它系统参数  $\mu'$  情况下的混沌信号、 $s(n+1) = \mu's(n)[1 - s(n)]$ ), 选择合适的初始条件, 通过大量数值计算, 我们都可以实现系统(4)和系统(5)的混沌同步, 即实现了混沌 Logistic 系统在不同系统参数下的混沌同步。部分结果如下:

当选择  $r(n)$  来源于系统(4)的混沌信号  $x(n)$

时, 选取  $r(n) = -x(n)$   $\mu = 4$ 、系统(4)、(5)的初始条件为  $x(0) = 0.6, y(0) = 0.7, \mu(0) = 2$ , 得到的同步结果如图 1; 当选择  $r(n)$  来源于系统(4)在不同系统参数时的混沌信号  $s(n)$  时, 选取  $r(n) = -s(n)$ 、 $s(0) = 0.2, \mu' = 3.9, \mu = 3.8$ 、系统(4)、(5)的初始条件为  $x(0) = 0.6, y(0) = 0.7, \mu(0) = 2$ , 得到的同步结果如图 2。

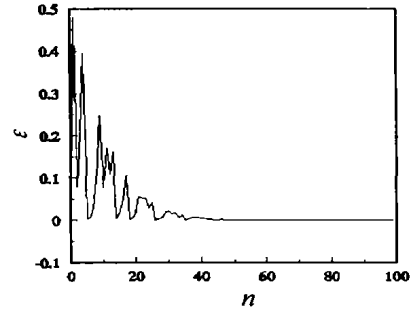


图 1 混沌 Logistic 系统在不同系统参数下的混沌同步结果

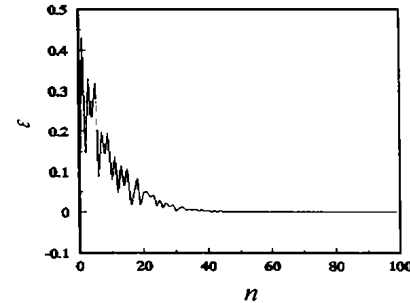


图 2 混沌 Logistic 系统在不同系统参数下的混沌同步结果

### 3.2 混沌 Kawakam 系统在不同系统参数下的混沌同步

混沌 Kawakam 系统是如下系统(6)

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1x_1(n) + \mu_1x_2(n) \\ x_1(n)^2 - 1.6 \end{pmatrix} \quad (6)$$

已有的研究<sup>[6]</sup>表明当系统参数取适当值时, 系统(6)处于混沌状态。同理选择它的参数受控系统为(7)

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.1x_1(n) + \mu_1(n)y_2(n) \\ x_1(n)^2 - 1.6 \end{pmatrix} \\ \mu_1(n+1) &= \mu_1(n) + r_1(n)[y_1(n) - x_1(n)] + \\ &+ r_2(n)[y_2(n) - x_2(n)] \end{aligned} \right\} (7)$$

当选择  $r(n)$  来源于系统(6)的混沌信号或者系统(6)在不同系统参数时的混沌信号  $s(n)$  时, ( $s(n)$  为 Kawakam 系统在其它系统参数  $\mu'_1$  情况下的混沌信号  $s_1(n+1) = -0.1s_1(n) + \mu'_1s_2(n), s_2(n+1) = s_1(n)^2 - 1.6$ ), 选择合适的初始条件, 通过大量数值计

算可得,可以实现系统(6)和系统(7)的混沌同步,即实现了混沌 Kawakam 系统在不同系统参数下的混沌同步。部分结果如下:

当选择  $r(n)$  来源于系统(6)的混沌信号时,选取  $r_1(n) = -x_1(n)/2, r_2(n) = 0, \mu_1(0) = 0.98$ 、系统(6)和(7)的初始条件为  $\mu_1(0) = 0.8, x_1(0) = 0.6, x_2(0) = 0.7, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.2$ ,得到的同步结果如图3;当选择  $r(n)$  来源于系统(6)在不同系统参数时的混沌信号  $s(n)$  时,选取  $r_1(n) = -0.1s_1(n), r_2(n) = 0, \mu'_1 = 0.96, s_1(0) = 0.2, s_2(0) = 0.5, \mu_1 = 0.97$ 、系统(6)和(7)的初始条件为  $\mu_1(0) = 0.8, x_1(0) = 0.6, x_2(0) = 0.7, y_1(0), y_2(0) = 0.2$ ,得到的同步结果如图4。

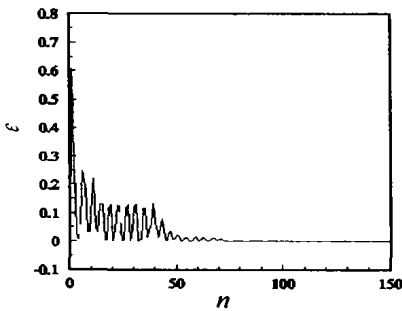


图3 混沌 Kawakam 系统在不同系统参数下的混沌同步结果

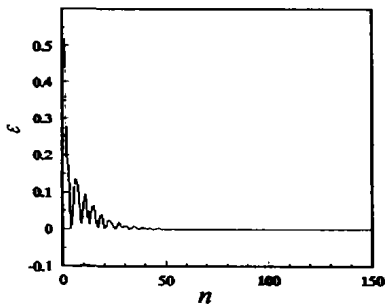


图4 混沌 Kawakam 系统在不同系统参数下的混沌同步结果

### 3.3 混沌 Henon 系统在不同系统参数下的混沌同步

混沌 Henon 系统是如下系统(8)

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - x_1(n)^2 + 0.3x_2(n) \\ x_1(n) \end{pmatrix} \quad (8)$$

已有的研究<sup>[7]</sup>表明当系统参数  $\mu_1$  取适当值时,系统(8)处于混沌状态,同上可选择它的参数受控系统为(9)。

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu(n) - x_1(n)^2 + 0.3y_2(n) \\ x_1(n) \end{pmatrix} \\ \mu(n+1) &= \mu(n) + r_1(n)[y_1(n) - x_1(n)] + r_2(n)[y_2(n) - x_2(n)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

当选择  $r(n)$  来源于系统(8)的混沌信号或者系统(8)在不同系统参数时的混沌信号  $s(n)$  时( $s(n)$  为 Henon 系统在其它系统参数  $\mu'_1$  情况下的混沌信号,  $s_1(n+1) = \mu'_1 - s_1(n)^2 + 0.3s_2(n), s_2(n+1) = s_1(n)$ ),通过大量数值计算可得,可以实现系统(8)和系统(9)的混沌同步,即实现了混沌 Henon 系统在不同系统参数下的混沌同步。部分结果如下:

当选择  $r(n)$  来源于系统(8)的混沌信号时,选取  $r_1(n) = -x_1(n), r_2(n) = 0, \mu_1 = 1.2$ 、系统(8)和(9)的初始条件为  $\mu_1(0) = 0.1, x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 0.5, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.2$ ,得到的同步结果如图5;当选择  $r(n)$  来源于系统(8)在不同系统参数时的混沌信号  $s(n)$  时,选取  $r_1(n) = -s_1(n), r_2(n) = 0, \mu'_1 = 1.16, s_1(0) = 0.2, s_2(0) = 0.5, \mu_1 = 1.19$ 、系统(8)和(9)的初始条件为  $\mu_1(0) = 0.8, x_1(0) = 0.6, x_2(0) = 0.7, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.2$ ,得到的同步结果如图6。文中所有图的纵坐标为  $\varepsilon = (\sum_i (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ 。

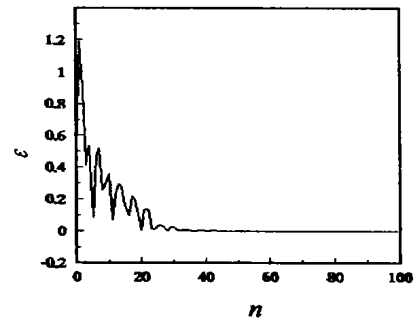


图5 混沌 Henon 系统在不同系统参数下的混沌同步结果

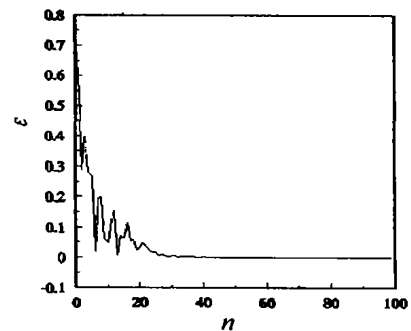


图6 混沌 Henon 系统在不同系统参数下的混沌同步结果

### 3 结 论

通过上面的数值模拟可知,笔者提出的方法是可行的。计算过程中发现,当两个系统达到同步时,两个系统的参数也完全相同了,所以文中的同步可以是混沌同步,也可以是周期同步,这完全取决于系统(1)是混沌的还是周期的,当系统(1)处于混沌状态时,不论系统(2)开始时是混沌的还是周期的,实现的是两个系统的混沌同步;当系统(1)处于周期状态时,不论系统(2)开始时是混沌的还是周期的,实现的是两个系统的周期同步。

#### 参考文献:

[1] OTT E. Chaos in Dynamical Systems [M]. London: Cambridge University Press, 1993.

- [2] GREBOGI C, LAI Y C. Controlling chaos in higher dimensions [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1997, 44 (10): 971 - 975.
- [3] XIAO - SONG YANG. On observability of 3D continuous - time autonomous chaotic systems based on scalar output measurement [J]. Int J Bifurcation and Chaos, 2002, 12(5): 1 159.
- [4] 贺明峰,穆云明,赵立中. 基于参数自适应控制的混沌同步[J]. 物理学报, 2000, 49(5): 830 - 833.
- [5] 戴栋,马西奎. 基于间歇参数自适应控制的混沌同步[J]. 物理学报, 2001, 50(7): 1 237 - 1 240.
- [6] 何岱海,徐建学,陈永红. 一两维平面映射系统奇怪动力学行为[J]. 物理学报, 1999, 48(9): 1 611 - 1 617.
- [7] 方锦清. 非线性系统中混沌的控制同步及其应用前景[J]. 物理学进展, 1996, 16(1): 1 - 78.

## Chaotic Synchronization of Discrete Nonlinear Systems on Different Parameters for a Kind of Systems

ZHOU Ping

(Institute of Optic-electric Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

**Abstract:** According to the theory of parameters adaptive control and variable driving, for a kind of discrete nonlinear chaotic systems, a method of chaotic synchronization is presented for different system parameters. In the equation of parameters adaptive control, control coefficients are chaotic signal. Because control coefficients are constant usually for the former parameters adaptive control, so the parameters adaptive control method is very universal, namely the former parameters adaptive control methods are special examples in our control method. Simulation results show that this method is available.

**Key words:** discrete nonlinear chaotic systems; different parameter; chaotic synchronization

(编辑 张小强)