文章编号:1000-582X(2003)03-0095-03

正交双复变函数空间的变换*

罗 义 银
(重庆大学 工程力学系,重庆 400044)

摘 要:根据正交双复数空间的概念及其表达[1],定义出相应的空间双复变函数的概念及其表达,$\Omega=f(\vartheta)=[u(x,y,z),v(x,y,z)]+iw(x,y,z)=(u,v)+iw$,$\vartheta=(x,y)+iz$.,推导出相应的空间变换,即"空间保角变换"的原理,并作出了相应的典型变换形态,如平方变换、空间茹科夫斯基变换。从而体现出空间正交双复变函数实现空间变换的优越性。

关键词:空间变换;正交双复变函数空间;空间保角变换
中图分类号:O174.5 **文献标识码**:A

文[1]给出了正交双复数及正交双复变函数的特殊概念及相应的运算规则,并导出了相应的解析条件,以及相应微、积分表达。在此基础上,为了有效表达三维物理问题的直观特性[2-4],比如空间的位势及流形问题,将进一步讨论正交双复变函数的空间变换,并且研究一些典型的变换及这种变换的规则;这些变换是通常的平面复变函数所无法实现的,而且也是进一步为空间的复杂积分变换奠定基础。采用的方法,还是基于平面复变函数的保角变换相同的手法,导出一些典型变换作为实例,不追求严格的数学推理证明。

1 正交双复数空间的概念

按照文[1]的分析原则,直接引用其定义及符号如下:

1.1 正交双复数空间的定义

正交的空间 x,y,z 坐标,以 z 轴为虚轴,x,y 为实轴,构成两个正交的复平面:(x,z),(y,z)及一个实数平面(x,y),共同构成正交的双复数空间,标记:

$$\vartheta=(x,y)+iz. = \quad (1)$$

$$\rho(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\theta+i\sin\theta= \quad (1')$$

$$\rho(\cos\varphi,\sin\varphi)\bullet e^{i\theta} \quad (1'')$$

为正交双(二维)复数空间。如图 1 所示。其中(x,y)为 ϑ 的实数坐标函数标记,它既具有坐标性质,又具有特定函数的特性。式(1′)和式(1″)为其三角表示和指数表示;$\bullet$ 为一个由式(1′)到式(1″)的特殊标记算符。$\theta=(\theta_x,\theta_y)$,为 ϑ 的幅角,即为矢径$\boldsymbol{\rho}$ 与(x,y)平面的夹角;θ_x,θ_y分别为$\boldsymbol{\rho}$ 在(x,z)和(y,z)平面上的投影ρ_x,ρ_y与 x,y 轴的夹角。φ 为$\boldsymbol{\rho}$ 在(x,y)平面上的投影ρ_{xy}与 x 轴的夹角。以上是将二维实数平面与两个空间正交的一维复数平面在欧式空间中形成了直观的正交组合,目的是为了展示物理问题的直观现象,并追求一些简便结果。这儿采用一个特殊的符号 $\vartheta=(x,y)+iz$. 来标记正交双复数概念,从上述可见,它既具有函数的性质,又具有坐标的部份特征,还具有矢量的一些特性。

1.2 正交双复变函数的定义

$$\Omega=f(\vartheta)=$$

$$[u(x,y,z),v(x,y,z)]+iw(x,y,z),$$

$$=(u,v)+iw \quad (2)$$

为双复数 ϑ 的正交双复变函数,且 Ω 是 ϑ 的连续函数。其中 $\vartheta=(x,y)+iz$,u、w、v 均为 x、y、z 的实函数。这里构造出三个空间实函数:$u(x,y,z)$,$v(x,y,z)$,$w(x,y,z)$,通过 $\Omega=f(\vartheta)=(u,v)+iw$,而构造出空间物理问题的位势及流形问题,因而可以用以表达这些物理问题的多样性和复杂性;特别是从 ϑ 空间到 Ω 空间的变换,就包含着丰富的数理内容。

2 正交双复数空间的变换,空间正交(保角)映射

和平面复变函数的正交(保角)映射一样[5,6],可以定义双复变函数的变换见图 1。

2.1 空间保角变换定理

若 $\Omega=f(\vartheta)$ 在区域 D 内解析,且 $f'(\vartheta)$ 在区域 D 内不处处为 0,则 $\Omega=f(\vartheta)$ 在区域 D 内所构成的映射是正交(保角)映射。这儿 $\vartheta=(x,y)+iz$,为空间正交双复数。(从直观认识可以相信其正确,严格的证明留给数学工作者去做。)

与平面的复变函数的保角映射一样,可以方便地

---

* 收稿日期:2002-11-27
作者简介:罗义银(1946-),男,重庆人,重庆大学副教授,主要从事固体力学方面的研究。

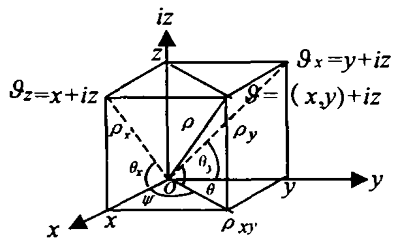

图 1 正交双复数空间

将其推广到正交双复数空间。例如：

$$\Omega = a + \vartheta, \tag{3}$$

其中 $a=(a_x, a_y)+ia_z$，显然实现了从 ϑ 空间到 Ω 空间的平移。

$$\Omega = a \cdot \vartheta, \tag{4}$$

其中 $a=(a_x, a_y)+ia_z$，实现了从 ϑ 空间到 Ω 空间的伸缩与旋转。

和平面的复变函数所实现的变换一样，可以定义各种 ϑ 空间到 Ω 空间的映象，以及空间单位球内外的映射等等。这里仅就一些典型映射进行讨论。

2.2 平方变换

例如：

$$\Omega = f(\vartheta) = \vartheta^2 \tag{5}$$

确定的映射。

$$\Omega = f(\vartheta) = \vartheta^2 = (x, y)^2 - z^2 + i\,2z(x, y) = (u, v) + iw, \tag{5'}$$

则其中

$$u = x^2 - z^2, \tag{6}$$

$$v = y^2 - z^2, \tag{7}$$

$$w = 2z(x, y)。 \tag{8}$$

对于如图 2 所示的 ϑ 空间中的直线 a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2，分别映射为 Ω 空间中的如下的情形。

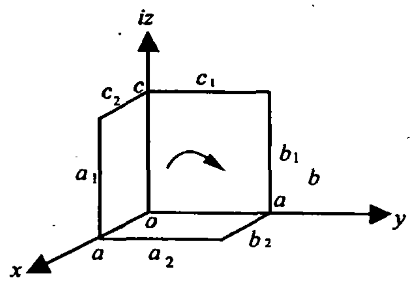

图 2 ϑ－空间中的直线

1）当 $x=a$，$y=0$，为 ϑ 空间中 (x, z) 平面内的直线 a_1，如图 2，映射为 Ω 空间中：$u=a^2-z^2$，$w=2za$，$v=-z^2$；消去 z，得 $u=a^2-w^2/(4a^2)$，$v=-w^2/(4a^2)$，$u=a^2+v$，即为顶点在 $(a^2, 0, 0)$ 的 (u, w) 及 (w, v) 平面内的抛物线 a_1 和 (v, u) 平面内的直线 a_1，如图 3。

2）当 $x=a$，$z=0$，为 ϑ 空间中 (x, y) 平面内的直线 a_2，映射为 Ω 空间中：$v=y^2$，$u=a^2$，$w=0$，的直线 a_2，如图 3。

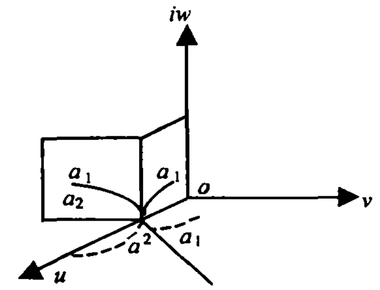

图 3 直线 a_1 和 a_2 在 Ω－空间中的映射

3）当 $y=b$，$x=0$，得 $u=-z^2$，$v=b^2-z^2$，$w=2bz$；消去 z，得 $u=-w^2/(4b^2)$，$v=b^2-w^2/(4b^2)$ 为平行于 (u, w)，(v, w) 平面，顶点在 $(0, b^2, 0)$ 的抛物线 b_1 及 (v, u) 平面内的直线 b_1，如图 4。

4）当 $y=b$，$z=0$，得 $u=x^2$，$w=0$，$v=b^2$，(v, u) 平面内的直线 b_2，如图 4。

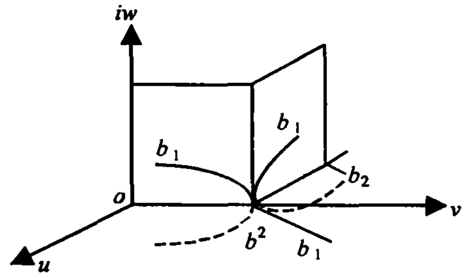

图 4 直线 b_1 和 b_2 在 Ω－空中的映射.

5）当 $z=c$，$x=0$，得 $v=y^2-c^2$，$w=2cy$，$u=-c^2$，消去 y，得 $v=-c^2+w^2/(4c^2)$，为平行于 (v, w) 平面内，顶点在 $(-c^2, -c^2, 0)$ 的抛物线 c_1 及 (v, u) 平面内的直线 c_1，如图 5。

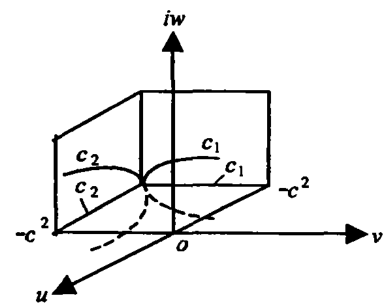

图 5 直线 c_1 和 c_2 在 Ω－空间中的映射.

6）当 $z=c$，$y=0$，得 $u=x^2-c^2$，$v=-c^2$，$w=2cx$；消去 x，得 $u=-c^2+w^2/(4c^2)$，为平行于 (u, w) 平面内，顶点在 $(-c^2, -c^2, 0)$ 的抛物线 c_2 及 (v, u) 平面内的直线 c_2，如图 5。

显而易见这些曲线在交点处是正交的。

2.3 空间的茹科夫斯基（Rukovski）变换[4]

仿照平面的茹科夫斯基（Rukovski）变换[5]，可以作出相应的“茹科夫斯基函数”如下：

$$\Omega = \frac{1}{2}(\vartheta + \frac{1}{\vartheta}) = \frac{1}{2}[(x,y) + \frac{(x,y)}{\rho^2}] + (1 - \frac{1}{\rho^2})iz \quad (9)$$

由 $\vartheta = (x, y) + iz$. ,$\Omega = (u,v) + iw$ 可得

$$u = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})x = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})\cos\varphi\cos\theta$$
$$v = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})y = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})\sin\varphi\sin\theta \quad (10)$$
$$w = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})z = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})\sin\theta$$

对于 ϑ 空间中的 $|\vartheta| = \rho_0$ 的同心球,变换为 $\Omega = (u,v) + iw$ 空间中的

$$u = \frac{1}{2}(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0})\cos\varphi\cos\theta,$$
$$v = \frac{1}{2}(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0})\sin\varphi\cos\theta, \quad (11)$$
$$w = \frac{1}{2}(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0})\sin\theta$$

消去 φ,θ,得 $$\frac{u^2+v^2}{a^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1 \quad (12)$$

其中 $a = \frac{1}{2}(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0})$, $c = \frac{1}{2}(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0})$,这是对于 w 轴的回转椭球族。

对于 ϑ 空间中的幅角(θ_0,φ_0)的射线,变换为 $\Omega = (u,v) + iw$ 空间中的

$$u = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})\cos\varphi_0\cos\theta_0,$$
$$v = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})\sin\varphi_0\cos\theta_0, \quad (13)$$
$$w = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})\sin\theta_0$$

消去 ρ,得 $$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = 1 \quad (14)$$

其中 $a = \sqrt{2}|\cos\varphi_0\cos\theta_0|$, $b = \sqrt{2}|\sin\varphi_0\cos\theta_0|$, $c = |\sin\theta_0|$,这是以 w 轴为虚轴的单叶双曲面,图形略。

这样就将茹科夫斯基的平面机翼图形变换,推广到空间立体图形的生成变换。

3 结　论

从分析可知,由文[1]所定义的正交双复数及其相应的双复变函数概念具有较优越的特性,所使用的标记符号 $\vartheta(x, y) + iz = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\theta + i\sin\theta = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi) \bullet e^{i\theta}$ 及 $\Omega = f(\vartheta) = [u(x, y, z), v(x, y, z)] + iw(x, y, z) = (u, v) + iw$ 对于定义它的运算规则及空间变换是方便适用的;分析表明,正交双复数及其复变函数和平面复数及其复变函数的特性相近;利用正交双复数及其双复变函数所实现的空间变换,可以将三维物理问题变换到空间正交的两个复平面上进行分析求解,从而较好地利用了平面复数的现有特性表达和计算。这里提出的概念,如果进一步推广和完善,将能有效地把一维复数推广到三维空间,可为物理问题的求解提供新方法和新手段。变换方法要用于计算机求解,尚须解决映射网格的生成计算及变换中的非线性等问题。文中的方法仅仅是一个尝试和开端,有许多工作尚值得进一步深入研究。

参考文献:

[1] 罗义银. 正交双复数空间的概念[J],重大学报,2002,25(10)。

[2] WAMG C W, WU J C. Numrical Solution of Navier - Stokes Problem using Integral Representations with Series Expansions[J]. AIAA Journal, 1986,24, (8): 1305 - 1312.

[3] WU J C. Boundary Element Solution of Viscous Flow Problems, Proceedings Of the 3rd International Conference on Boundary Element Technology. London, In: BET Ed. 1987, 467 - 473

[4] M A MANDELL, J P MYA, S SCHVEDE, et al. Model Categories of Diagram Spectra[C]. Proceedings of the London Mathematical Society. 2001, 82, (2).

[5] 梁昆淼,数学物理方法[M]. 北京:人民教育出版社, 1979,4 - 60.

[6] 华罗庚. 高等数学引论[M]. 北京:科学出版社, 1979. 190 - 209.

Transform of Orthogonal Double Complex Variables

LUO Yi-yin

(Department. Engineering. Mechanics, Chongqing University. Chongqing 400044, China)

Abstract. By article[1] the paper puts forward a concept of orthogonal double complex variables space. Its conformal transform and its typical form of transform are doscissed, such as three-dimensional complex space square transform, space rukovski transform.

Key words: space transform, space of double complex variables, space conformal transform

(责任编辑　刘道芬)