文章编号:1000-582X(2003)03-0098-04

风险企业债务估值未定权益分析的两个公式*

曹国华,向 锐
(重庆大学 经济与工商管理学院,重庆 400044)

摘 要:风险债务与无风险债务的估值有显著差异,风险债务估值不仅其收入流不确定,并且其贴现率也不确定,因此得不到一种解析表达式。不考虑贴现率即利率的变化,这样便能专注于资产价值的不确定性对债务价值的影响。未定权益分析作为期权定价理论的推广,广泛运用于债务估值,并能给出解析表达式。把默顿给出的公式的与布莱克等人给出的公式进行比较,说明了两个公式运用所需的条件,并进行了评述。

关键词:债务估值;未定权益分析;随机微分方程
中图分类号:F830.91 **文献标识码**:A

期权定价理论的推广如默顿所指的未定权益分析(即CCA)方法是研究风险企业债务价值的重要工具。风险债务与无风险债务的估值有显著差异,正如对股票估价常用股利贴现模型一样,对无风险债务由于其有固定的利息与本金支付,可以用收入资本化方法贴现求得价值,然而如同股利贴现模型,对无风险债务的利息及本金贴现必须考虑贴现率,贴现率是决定这些确定性模型的重要因素。风险债务估值不仅其收入流不确定的,往往其贴现率也不确定,因此往往得不到一种解析表达式。为简单起见,不考虑贴现率即利率的变化,特别地,不把其作为随机的,这样便能专注于资产价值的不确定性对债务价值的影响。

1 风险债务估值的基本假定

企业面临的财务风险与经营风险,直接影响企业对公司债的违约可能性,并且也会改变企业一旦违约,债权人所能得到的补偿,因此,其直接与债务价值有关。这里暂不考虑破产成本(既包括直接破产成本,也包括间接破产成本),去寻找与公司债务价值有关的因素。

CCA文献中的假定大多大同小异,其中最重要的几个假定如下[1-3]:

假设1:“关于金融市场的假定” 存在一个完美(perfect)、无摩擦(frictionless)金融市场,证券可以连续交易。没有交易成本或交易税,允许卖空,借贷利率是相等的,任何个人对金融资产的买卖不影响市场价格。

假设2:“关于无风险资产的假定”

存在一个无风险资产,其单位时间的回报率是已知的,且为常数,记为r,其不随时间而变化,即期限结构(term-structure)是平的(flat)且是确定的。

假定3:“关于企业资产价值动态性的假定”。

企业资产价值(独立于资本结构,即一个完全股权企业资产的价值)可描述一个扩散的随机过程,该随机过程可用随机微分方程表示:

$$dV = (\alpha V - C)dt + \sigma V dW \tag{1}$$

其中W是一标准布朗(Brown)运动或dW为高斯一维纳过程(Gauss-Wiener Process)。α是企业资产单位时间的瞬时预期回报率,σ^2是企业资产单位时间回报的瞬时方差,其反映资产回报的波动。C是企业单位时间的支付,如其大于0,则可看作是企业支付给股东(股利)或支付给债权人(利息),如其小于0,则表示为企业通过新融资(股权或债务融资)得到的净资本。

假定1与假定2对于构造无套利证券组合是必不可少的,只有通过无套利条件,才能对企业各类证券均衡定价。实际上,由于牵涉到随机微分方程(假定3),其主要使用的工具为伊滕引理(Ito's Lemma),对Ito过程的微分不同于一般函数的微分。运用Ito引理,就可导出关于企业证券价值的Black-Scholes微分方程。

* 收稿日期:2002-11-24
资助项目:国家自然科学基金资助项目(79970073);重庆大学青年骨干教师资助计划资助。
作者简介:曹国华,(1967-),男,安徽宣城人,重庆大学副教授,重庆大学博士。研究方向:证券投资及金融工程。

2　到期支付与公司债估值

下面来考虑公司债估值问题，假设公司仅有两类索取权(claims)，即一类剩余索取，股权，而另一类为单一债务(这里不考虑不同类型债务如可转换债等)。显然两类索取权的价值均依赖于企业资产价值 V，设企业某种证券价值 Y 可写作 $Y=F(V,t)$ 形式，Y 的动态性同样可写作一随机微分方程。

$$dY = [\alpha_y Y - C_y]dt + \sigma_y Y dW_y \tag{2}$$

类似于式(1)中参数的解释，这里 α_y 表示该证券单位时间瞬时预期回报率，σ_y^2 是其瞬时方差，C_y 为该证券单位时间的支付(股利或利息)，dW_y 为一标准高斯一维纳过程。

由于 $Y=F(V,t)$ 为 V 的函数，而 V 本身服从方程(1)，故 $Y=F(V,t$ 为 Ito 过程，对其运用 Ito 公式可得到 α_y、σ_y、C_y、W_y 与 α、σ、C、W 等之间的关系，实际上，由 Ito 引理，求 Y 求微分，并由(1)式可得

$$\begin{aligned} dY &= F_V dV + \frac{1}{2}F_{VV}(dV)^2 + F_t = \\ &\left[\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (\alpha V - C)F_V + F_t\right]dt + \\ &\sigma V F_V dW \end{aligned} \tag{3}$$

其中下标表示对 F 的偏导数，比较式(2)与(3)，则立即有

$$\alpha_y Y = \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (\alpha V - C)F_V + F_t + C_y \tag{4.a}$$

$$\sigma_y Y = \sigma V F_V \tag{4.b}$$

$$dW_y = dW \tag{4.c}$$

实际上，通过构造无套利证券组合，可以得到超额收益率之间的关系

$$\left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\right) = \left(\frac{\alpha_y - r}{\sigma_y}\right) \tag{5}$$

或

$$\alpha_y - r = \frac{\sigma_y}{\sigma}(\alpha - r) = \frac{VF_V}{Y}(\alpha - r) \tag{6}$$

运用(4.a)式及 $Y=F$，则(6)式立即有

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (\alpha V - C)F_V + F_t + C_y - rF = VF_V(\alpha - r)$$

简单移项得：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (rV - C)F_V - rF + F_t + C_y = 0 \tag{7}$$

此即证券价值所满足的偏微分方程，该式类似于布莱克－肖尔思在导出期权定价公式中得到的 $B-S$ 微分方程，因此这种分析可看作是 $B-S$ 分析的推广。当然，正如在得到 $B-S$ 公式一样，要完整描述 $F(V,t)$，还必须给出(7)式的边界条件与初始条件，这往往依赖证券本身的特征，也正是这些边界条件使得不同证券有所区别(如债务区别于股权)。

可在(7)式基础上讨论了风险贴息债券的定价，公司贴息债是指企业在债务到期前并不支付利息，而是到期支付面值 B，因而到期前的价格低于其面值。默顿假定，一旦公司到期违约，债券持有人(即债权人)立即接受公司(无破产成本)，而且在到期前，公司不能发行新债或支付股利，损害债权人利益。在这样假定性，$C_y=0$，$C=0$，设 T 为到期日，令 $\tau=T-t$，则 $F_t=-F_\tau$，则公司债务价值 $F(V,t)$ 改写为：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + rVF_V - rF - F_\tau = 0 \tag{8}$$

其边界条件与初始条件为：

$$F(0,\tau) = 0 \tag{9.a}$$

$$F(V,\tau)/V \leqslant 1 \tag{9.b}$$

$$F(V,0) = \min[V,B] \tag{9.c}$$

由(8)式及边界条件(9)可立即用富里叶变换(Fourier transforms)求解 F，实际上也可以直接利用期权定价的 $B-S$ 公式，先求股权价值 $f(V,\tau)$，再由 $F(V,\tau)=V-f(V,\tau)$ 求出债务价值。$f(V,\tau)$ 由下式给出

$$f(V,\tau) = V\Phi(x_1) - Be^{-r\tau}\Phi(x_2) \tag{10}$$

其中为标准正态分布函数，

$$x_1 = \left[\log\frac{V}{B} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\Big/\sigma\sqrt{\tau}$$

$$x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

从而有

$$\begin{aligned} F(V,\tau) = Be^{-r\tau}\Big\{&\Phi[h_2(L,\sigma^2\tau)] + \\ &\frac{1}{L}\Phi[h_1(L,\sigma^2\tau)]\Big\} \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$L \equiv Be^{-r\tau}/V$$

$$h_1(L,\sigma^2\tau) \equiv -\left[\frac{1}{2}\sigma^2\tau - \log L\right]\Big/\sigma\sqrt{\tau}$$

$$h_2(L,\sigma^2\tau) \equiv -\left[\frac{1}{2}\sigma^2\tau + \log L\right]\Big/\sigma\sqrt{\tau}$$

可以证明 $\Phi[h_2(L,\sigma^2\tau)] + \frac{1}{d}\Phi[h_1(L,\sigma^2\tau)]$ 通常小于或等于1，默顿定义风险债务的风险费为 $R(\tau)-r$，其中 $R(\tau)$ 由下式决定

$$\exp[-R(\tau)\tau] \equiv F(V,\tau)/B$$

则由(11)式，立即有

$$R(\tau)-r=\frac{-1}{\tau}\log\left\{\Phi\Phi[h_2(L,\sigma^2\tau)]+\frac{1}{d}\Phi[h_1(L,\sigma^2\tau)]\right\} \tag{12}$$

3 安全契约条款与债务估值

不同于默顿的工作，布莱克与考克斯从安全契约条款角度讨论了贴现债券的估值问题[2]，这里安全契约条款是指债权人有权在企业价值落在一个较低水平时强迫破产或重组，并立即得到企业资产所有权（也无破产成本），而不必如默顿所假定的必须在到期日实施。在这种情况下，利息支付将不起关键作用，因而布莱克与考克斯也仅考虑贴息债券，但他们允许企业支付股利如 dV，他们给出了特别的破产水平或重组边界为 $Ce^{-V(T-t)}$。设该债务价值为 $B(V,t)$，而到期面值为 P，运用首达时的分布，得到如下复杂公式：

$$\begin{aligned}B(V,t)=&Pe^{-r(T-t)}[\Phi(Z_1)-y^{2\theta-2}\Phi(Z_2)]+\\&Ve^{-d(T-t)}[\Phi(Z_3)+y^{2\theta}\Phi(Z_4)+\\&y^{\theta+\xi}e^{d(T-t)}\Phi(Z_5)+y^{\theta-\xi}e^{d(T-t)}\Phi(Z_6)-\\&y^{\theta-\eta}\Phi(Z_7)-y^{\theta-\eta}\Phi(Z_8)]\end{aligned} \tag{13}$$

其中，

$y=Ce^{-v(T-t)}/V$, $\theta=(r-d-v+\frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma^2$

$\delta=(r-d-v-\frac{1}{2}\sigma^2)^2+2\sigma^2(r-v)$, $\xi=\sqrt{\delta}/\sigma^2$,

$\eta=\sqrt{\delta-2\sigma^2 d}/\sigma^2$,

$Z_1=\left[\ln V/P+\left(r-d-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]/\sqrt{\sigma^2(T-t)}$

$Z_2=\left[\ln V/P+2\ln y+\left(r-d-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]/\sqrt{\sigma^2(T-t)}$

$Z_3=\left[-\ln V/P+\left(r-d+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]/\sqrt{\sigma^2(T-t)}$

$Z_4=\left[\ln V/P+2\ln y+\left(r-d+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]/\sqrt{\sigma^2(T-t)}$

$Z_5=[\ln y+\xi\sigma^2(T-t)]/\sqrt{\sigma^2(T-t)}$

$Z_6=[\ln y-\xi\sigma^2(T-t)]/\sqrt{\sigma^2(T-t)}$

$Z_7=[\ln y+\eta\sigma^2(T-t)]/\sqrt{\sigma^2(T-t)}$

$Z_8=[\ln y-\eta\sigma^2(T-t)]/\sqrt{\sigma^2(T-t)}$

4 两个公式的对比及结果

公司债与国债一样，是一种重要的金融资产，其价格行为远远比国债的价格行为复杂，一般认为国债不存在违约风险，而公司债存在违约风险。由于存在违约风险而产生的收益利差（yield spreads）是研究公司债的出发点，人们之所以愿意购买有违约风险的公司债，承担相应风险，就是因为能够获得高于国债收益的风险费，因此，运用 *CAPM* 可以解释公司债之所以存在的理由。各种资产的风险不同，从而其需求与供给也不同，从整个金融市场角度出发，公司债代表着一类重要金融资产，是金融市场不断完善的结果，这是从宏观（macro）角度考虑公司债定价或利差。文献[1]从这个角度把公司债的相对价格或利差看作是各种资产供求以及经济周期的函数，是这方面研究的一个代表。另一方面，也可从微观（micro）或企业特征角度讨论公司债价值，把企业债务价值看作是企业特征如企业财务或经营风险的函数，不同企业由于经营风险（市场或经济的不确定性）及财务风险不同，企业债务价值也就不同，从而不同企业的债券利差不等，这方面最初由文献[5]提出，该文虽然未能使用相机权益分析工具，但后来的相机权益分析与其分析结果是一致的，CCA 的优点在于可以直接提供一个函数可供实证检验，有时能得到解析解[5]。

莫顿考虑用中性定价，仔细观察式（4. b）与式（6）会发现，VF_V/F 是一重要比率。实际上这是一个弹性系数，把 F_V 写为$\partial F/\partial V$，就可看出。在（4. b）中，它把证券回报的瞬时标准差与企业资产回报的瞬时标准差联系在一起，而在式（6）中，它把证券瞬时回报率与企业资产瞬时回报率联系在一起，因此可以说该弹性系数传导了关于相对风险与预期回报的基本信息。另外，由式（7）也可发现，企业证券的价值与 α 无关，只与 σ^2 有关，这被称之为风险中性定价。在此基础上，由式（12）可以看出风险费仅仅是两个变量的函数，一个变量为 σ^2，表示企业经营的波动；另一个为 L，表示一种债务与企业价值的比率，为承诺支付的现值（以无风险利率贴现）与企业价值的比，默顿称之为“准”债务比率，所作的比较静态分析指出，风险费 $R(\tau)-r$ 是关于 L 与 σ^2 的增函数。并且考察债务应得的预期回报率 α_y 与市值的债务/股权比率即 $F/f=F/(V-F)$ 发现，α_y 开始是 F/f 的一个凸函数（convex function），而随着 F/f 值上升，α_y 经过一个拐点，变为 F/f 的一个凹函数（concave function），而 $F/f\to+\infty$ 当时，$\alpha_y\to\alpha$。

布莱克与考克斯更强调安全条款对风险债务价值的影响。在有安全契约条款时，$B(V,t)$ 是 V 与 t 的增函数，是 σ^2, r, d 的减函数，特别地选择 $ce^{-v(T-t)}=\rho Pe^{-v(T-t)}$，$0\le\rho\le1$，则容易由（13）式验证 B 是 ρ 的增函数，因此，债权人总是希望尽可能快地破产，使债务价值更大。B 不仅是 ρ 的增函数，而且还是 ρ 的凸函

数，并且随着 $\rho\rightarrow1$，$B_{(v,t)}\rightarrow Pe^{-r(T-t)}$，因此破产水平越高（$\rho$ 越大），债务会越安全。

默顿、布莱克与考克斯研究了债务估值或资本结构提供了强有力的分析工具，即 CCA 方法，但他们的结论并不令人满意。由于债权人只能在债务到期采取行动或达到一个较低的重组水平采取行动，而且债权人大多是直接接管企业，取得企业资产的完全所有权，从而债权人的损失相对有限。实际上，他们均未考虑破产成本或重组成本，也未考虑公司所得税，认为债权人具有绝对优先权，这一切都使他们的结果有可能偏离实证结果，正如文献[6]与文献[7]所表明的，上述模型暗示的利差通常小于现实债券市场的利差，因此债权人一定在其他方面可能有很大损失。尽管如此，结合我国的现实，上述两个公式对我国即将兴起的企业债券市场相应品种的定价有一定的参考价值。

参考文献：

[1] MERTON R. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates[J], Journal of Finance, 1974, 29:449-470.

[2] BLACK F, J COX. Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions[J], Journal of Finance, 1976, 31: 351 367

[3] JONES E, S MASON, E ROSENFELD P. Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structures: An Empirical Investigation [J]. Journal of Finance, 1984, 39: 611-625

[4] JAFFEE D. Cyclical Variations in the Risk Structure of Interest Rates[J]. Journal of Monetray Economics, 1975, 1: 309-325

[5] FIS H ER L, Determinants of Risk Premium on Corporate Bonds[J], Journal of Political Economy, 1959 (4): 269 322.

[6] FRANKS J, W TOROUS, An Empirical Analysis of U.S. Firms in Reorganization[J], Journal of Finance, 1989, 44: 747-770.

[7] ANDERSON, R S SUNDARESAN. Design and Valuation of Debt Contracts[J], Review of Financial Studies, 1996, 9: 37-68.

Two Formulas of Debt Valuation About risky Enterprise with Contingent Claims Analysis and Comparison

CAO Guo-hua, XIANG Rui

(College of Economic and Business Administration, Chongqing University Chongqing 400044, China)

Abstract: Risky debt valuation differs greatly from that of no-risk so that under uncertainty of income-flower and discount rate, usually we can not get a kind of resonlution to express the type. With no account of the discount rate, we are absorbed in property value influence under uncertainty. As generalizing the theory of option pricing, contingent claims analysis can handel debt valuation, and sometime give closed-form expressions. Two formula obtained by Merton and Black&Cox, are Compared and different conditions are discussed. At last, some comment on formula of debt valuation is given.

Key words: debt valuation; contingent claims analysis; stochastic different equation.

（责任编辑　刘道芬）