文章编号:1000 - 582X(2003)03 - 0032 - 04

线性空间中集值映射向量最优化的最优性条件*

周志昂,李泽民
(重庆大学 数理学院,重庆 400044)

摘 要:李泽民建立了实线性空间中次似凸集值映射向量最优化问题的 K-T 条件和 Lagrange 乘子定理。笔者首先引进了广义次似凸集值映射的概念。然后,在实线性空间中建立了一个广义次似凸集值映射的择一性定理。最后,利用择一性定理,获得了含不等式和等式约束的广义次似凸集值映射向量最优化问题的最优性条件。

关键词:集值映射; 最优性条件; 择一性定理; 广义次似凸; 实线性空间
中图分类号:O224 **文献标识码**:A

向量最优化问题的最优性条件一直是最优化理论研究中十分重要的课题。近年来,由于集值映射向量最优化理论在经济等领域的深入应用而引起人们的广泛关注,国内外的一些刊物都在不断刊登这方面的最新成果。文献[1]研究了集值映射向量优化问题的 Kuhn-Tucker 最优性条件,文献[2]讨论了集值映射向量优化问题的 Benson 真有效性。下面在序线性空间中引入广义次似凸集值映射的概念,然后通过建立择一性定理,获得了含不等式和等式约束的广义次似凸集值映射向量最优化问题的最优性条件。

1 基本概念和假设

设 Y 是一个线性空间,Y 中含有原点的正锥记成 Y_+。具有正锥的线性空间称为序线性空间。$\forall y^1, y^2 \in Y, y^1 \geqslant y^2 \Leftrightarrow y^1 - y^2 \in Y_+, y^1 \leqslant y^2 \Leftrightarrow y^2 \geqslant y^1$。

设 Y 是序线性空间,具有代数内部非空的正锥 Y_+,且 $Y \neq Y_+$。$\forall y^1, y^2 \in Y, y^1 > y^2 \Leftrightarrow y^1 - y^2 \in Y^i_+$,其中 Y^i_+ 表示 Y_+ 的代数内部,$y^2 < y^1 \Leftrightarrow y^1 > y^2$。用 Y^* 表示定义在 Y 上的所有线性泛函组成的集合,称集合 $Y^*_+ = \{y^* \in Y^* : \langle y, y^* \rangle \geqslant 0,\ \forall y \in Y_+\}$ 为 Y_+ 的代数对偶锥,其中 $\langle y, y^* \rangle$ 表示线性泛函 y^* 在点 y 的值 $y^*(y)$。设 O 代表各向量空间中的零元素,0 代表实数零,以后不再申明。

设 D 是任一非空集合,Y 是序线性空间,具有代数内部非空的正锥 Y_+,$F: D \to 2^Y$ 是 D 到 Y 的集值映射,记

$$F(D) = \bigcup_{x \in D} F(x);$$

$$\langle F(x), y^* \rangle = \{\langle y, y^* \rangle \mid y \in F(x)\};$$

$$\langle F(D), y^* \rangle = \bigcup_{x \in D} \langle F(x), y^* \rangle;$$

$\langle F(x), y^* \rangle \geqslant 0$, iff $\langle y, y^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in F(x)$;

$\langle F(D), y^* \rangle \geqslant 0$, iff $\langle F(x), y^* \rangle \geqslant 0$, $\forall x \in D$;

R 是实数集,$A \subset R, b \in R, A \geqslant b$, iff $a \geqslant b$, $\forall a \in A$。

定义 1[1] 集值映射 $F: D \to 2^Y$ 称为 Y_+-次似凸,如果,$\exists u \in Y^i_+$,对 $\forall x^1, x^2 \in D$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x^3 \in D$, s. t. : $\varepsilon u + \lambda F(x^1) + (1-\lambda) F(x^2) \subset F(x^3) + Y_+$。

引理 1[1] $Y_+ + Y^i_+ \subset Y^i_+$。

引理 2[1] 设 Y 是一个实线性空间,具有代数内部非空的正锥 Y^i_+,若 $y^* \in Y^*_+, y^* \neq O, y \in Y^i_+$ 则 $\langle y, y^* \rangle > 0$。

2 广义次似凸集值映射和择一性定理

本节将给出广义次似凸集值映射的定义,研究它的性质以及它和其它广义凸的关系。

定义 2 集值映射 $F: D \to 2^Y$ 称为广义 Y_+-次似凸,如果 $\exists u \in Y^i_+$,对 $\forall x^1, x^2 \in D$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x^3 \in D$, $\exists \rho > 0$,使得:$\varepsilon u + \lambda F(x^1) + (1-\lambda) F(x^2) \subset \rho F(x^3) + Y_+$。

定理 1 考虑下列条件:

(i) $\forall u \in Y^i_+$, $\forall x^1, x^2 \in D$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $\exists x^3 \in D$, $\exists \rho > 0$, s.t. $u + \lambda F(x^1) + (1-\lambda) F(x^2) \subset \rho F(x^3) + Y_+$;

(ii) 集值映射 $F: D \to 2^Y$ 在 D 上是广义 Y_+-次似凸;

(iii) 对 $\forall x^1, x^2 \in D$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $\exists u = u(x^1, x^2, \lambda)$

* 收稿日期:2002 - 10 - 15
作者简介:周志昂(1972 -),男,四川达州人,重庆大学硕士研究生。主要从事最优化研究。

$\in Y^i_+$，对 $u=u(x^1,x^2,\lambda)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists x^3=x^3(u,\varepsilon)\in D$，$\exists\rho=\rho(u,\varepsilon)>0$，s. t.

$\varepsilon u+\lambda F(x^1)+(1-\lambda)F(x^2)\subset\rho F(x^3)+Y_+$；

(iv) $\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$ 是凸集。

则：$(i)\Rightarrow(ii)\Rightarrow(iii)\Rightarrow(iv)$。

证明 $(i)\Rightarrow(ii)$，$(ii)\Rightarrow(iii)$ 是显然的，这里仅需要证明 $(iii)\Rightarrow(iv)$。

令 $M=\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$，设 $m^j\in M,\lambda\in(0,1)$，则 $\exists\lambda^j\geqslant0,x^j\in D,y^j\in Y^i_+$，s. t. $m^j\in\lambda^jF(x^j)+y^j$，$j=1,2$。设 $m=\lambda m^1+(1-\lambda)m^2\in\lambda\lambda^1F(x^1)+(1-\lambda)\lambda^2F(x^2)+y^0$，其中 $y^0=\lambda y^1+(1-\lambda)y^2\in Y^i_+$。

若 λ^1 或 $\lambda^2=0$，显然 $m\in M$。

假设 $\lambda^1>0,\lambda^2>0$，令 $\alpha=\lambda\lambda^1+(1-\lambda)\lambda^2$，$\beta=\lambda\lambda^1/\alpha$，则

$\beta\in(0,1)$，$m\in\alpha(\beta F(x^1)+(1-\beta)F(x^2))+y^0$，

由 (iii) 知，对上述 $x^1,x^2\in D$，$\beta\in(0,1)$，$\exists u\in Y^i_+$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x^3\in D$，$\exists\rho>0$，s. t.

$$\begin{aligned}m&\in\alpha(\beta F(x^1)+(1-\beta)F(x^2))+y^0\\&\in\alpha\rho F(x^3)+y^0-\alpha\varepsilon u+\alpha Y_+\\&\in\mathrm{cone}(F(D))+y^0-\alpha\varepsilon u+Y_+,\end{aligned}$$

由于 $y^0\in Y^i_+$，从而可选 $\varepsilon>0$ 充分小，使 $y^0-\alpha\varepsilon u\in Y^i_+$，即 $m\in\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_++Y_+$，再由引理1知 $m\in\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$，因此 $\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$ 是凸集。

显然，当 $\rho=1$ 时，定义2就是次似凸的定义，即如果集值映射 F 在 D 上是次似凸的，则 F 在 D 上也是广义次似凸的。

注1：定理1推广了文献[3]的定理2。

定理2（择一性定理） 设 X 是一个线性空间，D 是 X 的一个非空子集，Y 是序线性空间，具有代数内部非空的正锥 Y_+，若集值映射 $F:D\to2^Y$ 是广义 Y_+－次似凸的，则下面的 (i)，(ii) 有且仅有一个成立。

(i) $\exists x^0\in D$，s. t. $-F(x^0)\cap Y^i_+\neq\Phi$；

(ii) $\exists y^*\in Y^*_+$，s. t. $y^*\neq O$，$\langle F(D),y^*\rangle\geqslant0$。

证明 若 (i)，(ii) 同时成立，则 $\exists y^0\in F(x^0)$，s. t. $-y^0\in Y^i_+$，由引理2知 $\langle y^0,y^*\rangle<0$，这与 (ii) 矛盾，因此 (i)，(ii) 不能同时成立。

现在假设 (i) 不真，可以断定 $O\notin\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$。

事实上，若 $O\in\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$，则 $\exists x^0\in D$，$\exists\alpha\geqslant0$，s. t. $y^0\in F(x^0)$，$O\in\alpha y^0+Y^i_+$，若 $\alpha=0$，则 $O\in Y^i_+$，这不可能；若 $\alpha>0$，则 $-y^0\in(1/\alpha)Y^i_+\in Y^i_+$，这与 (i) 不真矛盾。因此 $O\notin\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$。

显然 $\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$ 的代数内部非空，再由定理1知 $\mathrm{cone}(F(D))+Y^i_+$ 是凸集，因此由文献[4]中线性空间的凸集分离定理可知，$\exists y^*\in Y^*$，$y^*\neq O$，s. t.

$$\langle\alpha F(x)+y,\ y^*\rangle\geqslant0,\ \forall\alpha\geqslant0,\ \forall x\in D,\forall y\in Y^i_+,\tag{1}$$

在(1)中令 $\alpha=0$，可得 $\langle y,y^*\rangle\geqslant0$，$\forall y\in Y^i_+$。

可以断定 $\langle y,\ y^*\rangle\geqslant0$，$\forall y\in Y_+$。

事实上，若 $\exists y'\in Y_+$，s. t. $\langle y',y^*\rangle<0$，则对 $\forall\theta>0$，有 $\langle\theta y',y^*\rangle=\theta\langle y',y^*\rangle<0$，又由引理1知 $\theta y'+y\in Y^i_+$，其中 $\theta y'\in Y_+$，$y\in Y^i_+$，因此 $\langle\theta y'+y,y^*\rangle\geqslant0$，即

$$\theta\langle y',y^*\rangle+\langle y,y^*\rangle\geqslant0,\ \forall\theta>0,\tag{2}$$

但是当 $\theta>-\langle y,y^*\rangle/\langle y',y^*\rangle\geqslant0$ 时，(2)式不成立，因此 $\langle y,y^*\rangle\geqslant0$，$\forall y\in Y_+$，即 $y^*\in Y^*_+$，且 $y^*\neq O$。

在(1)式中，令 $\alpha=1$，有 $\langle F(x)+y,y^*\rangle\geqslant0$，$\forall x\in D$，$\forall y\in Y^i_+$. 取 $t^0\in Y^i_+$，$\lambda^n>0$，且 $\lambda^n\to0(n\to+\infty)$，则

$$\langle F(x)+\lambda^nt^0,y^*\rangle\geqslant0,\ \forall x\in D,\ \forall n\in N,$$

令 $n\to+\infty$ 便得 $\langle F(x),y^*\rangle\geqslant0$，$\forall x\in D$。

注2：定理2推广了文献[1]的定理2.1，文献[3]的定理3.1，文献[5]的定理3.1。

3 最优性条件

现在考虑下面的最优化问题：

$$(P)\quad\begin{array}{ll}\min & F(x)\\ \mathrm{s.t.} & -G(x)\cap(Z_+\neq\Phi\\ & O\in H(x),x\in D。\end{array}$$

集值映射 $F:D\to2^Y$，$G:D\to2^Z$，$H:D\to2^W$，D 是任一非空集合，Y,Z,W 分别是由正锥 Y_+,Z_+,W_+ 确定序的序线性空间，并且 Y^i_+,Z^i_+,W^i_+ 均为非空，类似文献[1]的引理2.4和引理2.5的证明，可得 $(Y_+\times Z_+\times W_+)^i=Y^i_+\times Z^i_+\times W^i_+\neq\Phi$，$(Y_+\times Z_+\times W_+)^*=Y^*_+\times Z^*_+\times W^*_+$。称 $K=\{x\in D\mid-G(x)\cap Z_+\neq\Phi,\ O_w\in H(x)\}$ 为 (P) 的可行集。

定义3 称 $x^0\in K$ 是 (P) 的弱有效解，如果存在 $y^0\in F(x^0)$，使得：$(y^0-F(K))\cap Y^i_+=\Phi$。

令 $J(x)=F(x)\times(G(x)\times H(x)$，$\forall x\in D$. 显然 J 是从 D 到 $Y\times Z\times W$ 的一个集值映射。

定理3（最优性必要条件）

假设 (i) $x^0\in K$ 是 (P) 的弱有效解；

(ii) $(F(x)-y^0)\times G(x)\times H(x)$ 在 K 上是广义 $Y_+\times Z_+\times W_+$－次似凸，其中 y^0 是 (i) 中 x^0 按定义所对应的元素。则

$\exists y^*\in Y^*_+,z^*\in Z^*_+,w^*\in W^*_+$，且 $(y^*,z^*,w^*)\neq(O,O,O)$，s. t.

$$\inf_{x\in K}(\langle F(x),y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle+\langle H(x),w^*\rangle)=\langle y^0,y^*\rangle,$$

$$\inf(\langle G(x^0),z^*\rangle+\langle H(x^0),w^*\rangle)=0,$$

$\inf\langle G(x^0),z^*\rangle=0$。

证明 由定义 3,可知$(y^0-F(K))\cap Y_+^i=\Phi$,

令$J^*(x)=(F(x)-y^0)\times G(x)\times H(x)$, $\forall x\in K$,显然$J^*(x)=F(x)\times G(x)\times H(x)-(y^0,O,O)$, $\forall x\in K$,不难看出$-J^*(x)\cap(Y_+\times Z_+\times W_+)^i=\Phi$, $\forall x\in K$.于是由假设(ii)和定理 2 可知,$\exists y^*\in Y_+^*,z^*\in Z_+^*,w^*\in W_+^*$,且$(y^*,z^*,w^*)\neq(O,O,O)$,s.t.

$$\langle J^*(x),(y^*,z^*,w^*)\rangle\geqslant 0,\ \forall x\in K。$$

即
$$\langle F(x),y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle+\langle H(x),w^*\rangle\geqslant\langle y^0,y^*\rangle,\forall x\in K。\tag{3}$$

一方面由于$x^0\in K$,因此$\exists p\in G(x^0)$,s.t. $-p\in Z_+$,从而$\langle p,z^*\rangle\leqslant 0$;另一方面,在(3)式中,令$x=x^0$,由于$O\in H(x^0)$,因此有$\langle y^0,y^*\rangle+\langle p,z^*\rangle+\langle O,w^*\rangle\geqslant\langle y^0,y^*\rangle$,故$\langle p,z^*\rangle\geqslant 0$,从而$\langle p,z^*\rangle=0$。因此$\langle y^0,y^*\rangle\in\langle F(x^0),y^*\rangle+\langle G(x^0),z^*\rangle+\langle H(x^0),w^*\rangle$。于是由(3)式便得

$$\inf_{x\in K}(\langle F(x),y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle+\langle H(x),w^*\rangle)=\langle y^0,y^*\rangle。$$

在(3)式中再令$x=x^0$,又可得

$$\langle y^0,y^*\rangle+\langle G(x^0),z^*\rangle+\langle H(x^0),w^*\rangle\geqslant\langle y^0,y^*\rangle。$$

因此$\langle G(x^0),z^*\rangle+\langle H(x^0),w^*\rangle)\geqslant 0$,又由上面的证明可知,$\exists p(G\in x^0)$,s.t. $\langle p,z^*\rangle=0$,并且由于$O\in H(x^0)$,因此

$$\inf(\langle G(x^0),z^*\rangle+\langle H(x^0),w^*\rangle)=0。$$

在(3)式中又令$x=x^0$,可得

$$\langle y^0,y^*\rangle+\langle G(x^0),z^*\rangle+\langle o,w^*\rangle\geqslant\langle y^0,y^*\rangle,$$

从而$\langle G(x^0),z^*\rangle\geqslant 0$,故$\inf\langle G(x^0),z^*\rangle=0$.

注 3:定理 3 推广了文献[1]的定理 3.2 和文献[3]的定理 4.2.

定理 4(最优性充分条件) 设

(i) $x^0\in K$;

(ii) $\exists y^0\in F(x^0)$, $(y^*,z^*,w^*)\in Y_+^*\times Z_+^*\times W_+^*$,且$(y^*,z^*,w^*)\neq(O,O,O)$,s.t.

$$\inf_{x\in K}(\langle F(x),y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle+\langle H(x),w^*\rangle)=\langle y^0,y^*\rangle;$$

(iii) $\exists x'\in D$, s.t. $O\in H(x')$, $-G(x')\cap Z_+^i\neq\Phi$, $O\in(H(D))^i$。

则$x^0\in K$是(P)的弱有效解。

证明 由(ii)可得

$$\langle F(x)-y^0,y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle+\langle H(x),w^*\rangle\geqslant 0,\ \forall x\in D。\tag{4}$$

可以断言$y^*\neq O$.事实上假设$y^*=O$,则$(z^*,w^*)\neq(O,O)$,下面分两种情况导致矛盾。

(a)当$z^*\neq O$时,(4)式化为

$$\langle G(x),z^*\rangle+\langle H(x),w^*\rangle\geqslant 0,\ \forall x\in D.\tag{5}$$

由(iii),$\exists u\in G(x')$, s.t. $-u\in Z_+^i$.故由引理 2,$\langle u,z^*\rangle<0$。注意到$O\in H(x')$,于是可得$\langle u,z^*\rangle+\langle O;w^*\rangle<0$,此与(5)矛盾;

(b)当$z^*=O$时,则$w^*\neq O$,(4)式化为

$$\langle H(D),w^*\rangle\geqslant 0。\tag{6}$$

因$O\in(H(D))^i$,所以对任意给定$v\in(W_+)^i$,$\exists\varepsilon>0$,s.t. $-\varepsilon v\in(H(D))^i$,故$\langle-\varepsilon v,w^*\rangle=-\varepsilon\langle v,w^*\rangle<0$,这与(6)式矛盾。

由(a)和(b)可知$y^*\neq O$。

如果$x^0\in K$是(P)的弱有效解,则$\exists x^\#\in K$, s.t. $[y^0-F(x^\#)]\cap Y_+^i\neq\Phi$。从而$\exists t\in F(x^\#)$, s.t. $y^0-t\in Y_+^i$,由引理 2 得

$$\langle t-y^0,y^*\rangle<0\tag{7}$$

又因为$x^\#\in K$,故$\exists q\in G(x^\#)$, s.t. $-q\in Z_+$,且$O\in H(x^\#)$。所以

$$\langle q,z^*\rangle+\langle O,w^*\rangle\leqslant 0。\tag{8}$$

(7)+(8)得

$$\langle t-y^0,y^*\rangle+\langle q,z^*\rangle+\langle O,w^*\rangle<0。$$

这与(4)式矛盾,故x^0是(P)的弱有效解。

注 4:定理 4 推广了文献[1]的定理 3.4。

参考文献:

[1] LI Z M. The Optimality conditions for vector optimization of set-valued maps[J],JMMA,1999,237:413-424.

[2] LI Z F. Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps[J]. JOTA,1998,98(3):623-649.

[3] YANG X M,YANG X Q., CHEN G Y. Theorems of the alternative and optimization with set-valued maps[J]. JOTA, 2000,107(3):627-640.

[4] 胡毓达,孟志青. 分析与非光滑分析[M]. 上海:上海科技文献出版社,2000.

[5] CHEN G Y, RONG W D. Characterizations of the benson proper efficiency for nonconvex vector optimization[J]. JOTA,1998,98(2):365-384.

[6] LI Z M. A Theorem of the alternative and Its application to the optimization of set-valued maps[J]. JOTA, 1999, 100(2):365-375.

(接下第 88 页)

RELAP5 Analysis of Passive Emergency Core Cooling System Tests

PENG Yun-kang[1], LI Kui-ning[1], TONG Ming-wei[1], ZHENG Hua[2], XIAO Ze-jun[2]

(1. College of Engineering Thermophysics, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. Nuclear Power Institute of China, Chengdu 610041, China)

Abstract: One of the apparent characteristic of advanced PWR is the high reliability of passive safety system. It is important to assess the operation behavior of such system and the ability of system analysis code as RELAP5. One principal test facility, passive emergency core cooling system experiments is carried out. The RELAP5/Mod3.2 is used to simulated the experiments in this paper. The simulation capability of RELAP5/Mod3.2 in passive emergency core cooling system is assessed through the comparison between the experimental results and calculation results.

Key words: RELAP5 passive; emergency core cooling system; simulation comparison

(责任编辑 陈移峰)

(上接第 36 页)

Optimality Conditions for Vector Optimization of Set-valued Maps

ZHOU Zhi-ang, LI Ze-min

(College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Kuhn-Tucker optimality conditions and Lagrange multipliers for vector optimization problems with subconvexlike set-valued maps were established by Li zemin. Firstly, the concept of generalized subconvexlikeness for set-valued maps is introduced in this paper. Then, a theorem of the alternative for generalized subconvexlike set-valued maps in real linear spaces is established. Finally, the optimality conditions for vector optimization problems with set-valued maps with equality and inequality constraints are obtained with it.

Keywords: set-valued maps; optimality conditions; alternative theorems; generalized subconvexlike; real linear spaces

(责任编辑 吕赛英)