文章编号:1000-582X(2003)04-0054-04

Schwarzschild 引力场中 Proca 光线的偏折*

代洪霞[1,2],石东平[1,3],龙炳蔚[4]
(1. 重庆大学 数理学院,重庆 400044; 2. 重庆工商大学 理学院,重庆 400067;
3. 渝西学院 物理系,重庆 402168; 4. 美国亚历桑那大学 物理系)

摘 要:检验光子的静质量对验证狭义相对论的理论基础"光速不变原理"有着重要的意义。已有的检验方法通常是在没有引力场的情况下进行的,得到光子静质量的上限值是 $m_r \leqslant 7\times10^{-52}$ g。这里主要讨论有引力场时可能造成的影响,并以球对称引力场为例,计算了有质量光子对应的光线偏折,发现若光子有静质量,偏折角将发生改变,但改变的数量级极小。

关键词:光子静质量;Proca 方程;球对称引力场
中图分类号:O420 **文献标识码**:A

自 20 世纪 30 年代 Proca 对 Maxwell 方程提出修正,得到有质量光子的 Proca 方程即重电磁波方程以来,有众多以 Proca 方程为理论基础的实验对光子是否具有静质量进行过检测,迄今为止最常用的方法大致有以下几种:利用 Proca 电磁波的真空色散效应,检验库仑定律的平方反比,偶磁极产生的 Proca 静磁场,等等[1-6]。所有这些实验都没有考虑引力场的影响。而在真空色散型的检验方式中,所涉及的尺度往往是天文数量级的。这时,引力场对检验结果的修正就不能不给予考虑。笔者以 Proca 光线在球对称引力场背景下的传播为例,估计引力场对光子静质量检验造成的影响。

在本文中,为方便计算,采用 c = 1 的单位制。在代人数值计算时,再返回到普通单位制。

2 引力场中 Proca 光线的传播方程

从引力场中的 Proca 电磁场方程出发,推导有限质量光子对应的光线在引力场中的传播方程。首先回顾一下 Lorentz 惯性系中的电磁场方程

$$F_{\alpha\beta}^{\ ,\beta} + \mu^2 A_\alpha = 4\pi J_\alpha \tag{1}$$

将 $F_{\alpha\beta}$ 用 A_α 改写

$$A_{\alpha,\beta}^{\ ,\beta} - A_{\beta,\alpha}^{\ ,\beta} + \mu^2 A_\alpha = 4\pi J_\alpha \tag{2}$$

因为电荷守恒不能违背,所以 A_α 必须满足 Lorentz 规范

$$A_\beta^{\ ,\beta} = 0 \tag{3}$$

代人式(2),得到

$$A_{\alpha,\beta}^{\ ,\beta} + \mu^2 A_\alpha = 4\pi J_\alpha \tag{4}$$

如果仅考虑电磁波的传播,有 $J_\alpha = 0$,所以

$$A_{\alpha,\beta}^{\ ,\beta} + \mu^2 A_\alpha = 0 \tag{5}$$

在有引力场的情况下,只需将相应的普通微商换成协变微商[7-8],就可以得到引力场的方程

$$A_{\alpha;\beta}^{\ ;\beta} + \mu^2 A_\alpha = 0 \tag{5'}$$

考虑传播解

$$A_\alpha = B_\alpha e^{i\psi} \tag{6}$$

在几何光学的极限下,即电磁波频率相当大,波长相当小时,描述相位的标量 ψ 是随时空点 x^ρ 迅速变化的函数,而振幅 B_α 是几乎为常数的缓慢变化函数。将式(6)代人式(5'),利用协变微商的性质和约定的几何光学极限略去 $B_{\alpha;\beta}^{\ ;\beta}$, $B_\alpha^{\ ;\beta}$ 及 $\psi_{;\beta}^{\ ;\beta}$ 等项,计算得到

$$\psi_{,\beta}\psi^{,\beta} - \mu^2 = 0 \tag{7}$$

将 ψ 在无穷小的领域内展开,有

$$\psi = \psi_0 + \frac{\partial\psi}{\partial x^\beta}\cdot x^\beta + o(x^\beta)$$

$$A_\alpha = B_\alpha e^{i(\psi_{,\beta}\cdot x^\beta + \psi_0)} \tag{8}$$

式(8)表明,在小区域内 A_α 可以看作单色波形式。因此可以将 $\psi_{,\beta}$ 定义为光的四维波矢量

* 收稿日期:2002-11-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10175096,19835040);湖北省引力与量子实验室开放基金资助课题(GQ0101)
作者简介:代洪霞(1969-),女,重庆人,重庆大学硕士研究生,重庆工商大学讲师,主要从事物理教学和广义相对论的研究工作。

$$k_\beta = \psi_{,\beta} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} \tag{9}$$

代入式(7)，有

$$k_\beta \cdot k^\beta = \mu^2 \tag{10}$$

沿着光的传播轨线 $x^\alpha(s)$，k_β 就是其上每一点处相应的切矢量。所以，$k^\beta = f\frac{dx^\beta}{ds}$

其中，f 为某一常数。令

$$l^\beta = \frac{dx^\beta}{ds} \tag{11}$$

选取合适的仿射参量 S，使得有归一关系

$$l_\beta \cdot l^\beta = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds} = 1 \tag{12}$$

从式(12) 可以看出，Proca 光线走的不再是零短程线。事实上，仿射参量 s 也可以因此取有限质量光子的固有时。由式(10) 和式(12) 两个归一关系，容易看出 $f = \mu$，即

$$k_\beta = \mu l_\beta \tag{13}$$

为了得到有质量光子轨线的方程，应该求得包含关于 x^β 二阶微商的方程。为此，求式(7) 的微分，考虑 $g_{\alpha\beta}$ 的对称性和

$$\psi^{,\alpha} = \mu\frac{dx^\alpha}{ds} = \mu l^\alpha$$

$$\psi_{,\alpha,\rho} = \psi_{,\rho,\alpha}$$

注意到 $\frac{d}{ds} = \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$，整理后得

$$\frac{d}{ds}(l_\rho) = \frac{1}{2}l^\alpha l^\beta g_{\alpha\beta,\rho} \tag{14}$$

而对于 x^α，有

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\rho\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}\right) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\rho}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} \tag{15}$$

对于普通的 Maxwell 光来说，

$$\psi_{,\beta}\psi^{,\beta} = 0 \tag{16}$$

微分后求得的关于 x^α 二阶微商的表式应与式(15) 相同，但是归一关系却为

$$l_\beta \cdot l^\beta = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{17}$$

此时，仿射参量 s 不再具有固有时的含义。而对 Proca 重光线来说

$$l_\beta \cdot l^\beta = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds} = 1 \tag{18}$$

式(15) 与式(18) 式联立，就决定了 Proca 光线在引力场中的传播方式。

3　Schwarzschild 引力场中 Proca 光线的偏折

现在以 Schwarzschild 引力场(球对称引力场) 为例，来计算有限质量光子对光线在静态引力场作用下的偏折产生的修正。

令 $x^\mu = (t,r,\theta,\varphi)$，$\mu$ 分别对应 0,1,2,3。取 Schwarzschild 外部解

$$ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{19}$$

利用式(14) 推导相应的 Proca 光线的轨线方程。

当 $\rho = 0$，$g_{\alpha\beta,0}$ 没有非零分量，$g_{0\alpha}$ 的非零分量只有 $g_{00} = 1-\frac{2GM}{r}$，所以

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{ds}\right] = 0$$

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{ds} = l_0 = \text{const} \tag{20}$$

当 $\rho = 2$ 时，$g_{\varphi\varphi,\theta} = -r^2\sin 2\theta$，代入并整理，得

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{\sin 2\theta}{2}r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

事实上，因为 Schwarzsschild 解的球对称性，光子轨迹必被限制在一个平面内。若不然，通过对轨迹初始密切平面(即初始三维波矢量与原点构成的平面) 的反射变换，可以得到 2 个左右不对称的解。取该平面为赤道面

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = 0, l_2 = 0 \tag{21}$$

这样，空间的三维减少成二维。

当 $\rho = 3$ 时，$g_{\alpha\beta,3}$ 也没有非零分量，并由 $\theta = \pi/2$，立即有

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0$$

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = l_3 = \text{const} \tag{22}$$

迄今为止，得到了 3 个首次积分

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{ds} = l_0$$

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = l_3 \tag{23}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

计算 $\rho = 1$ 对应的微分方程比较繁琐，不如用归一化关系作为第 4 个首次积分更为方便，$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds} = 1$，即

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 -$$

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=1 \quad (24)$$

光线在球对称引力场中的偏折对应于方程(24)的散射解。即光线从无穷远来,又回到无穷远,入射渐进线与出射渐进线有一个小的偏角。假设光线被引力场散射时,离原点最近处$r=r_0$。此时有$\frac{dr}{ds}=0$,再将式(23)对应的方程

$$\frac{dt}{ds}=\frac{l_0}{1-\frac{2GM}{r}} \qquad \frac{d\varphi}{ds}=\frac{l_3}{r^2}$$

代入式(24),解得

$$l_3=r_0\cdot\left[l_0^2\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}-1\right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

因为l_0正比于光的频率ω,式(25)即反映了频率与l_3的关系。

用 Binet 方法来找这个散射解。做变量代换$u=GM/r$,寻找u与φ的关系。为此,先用$\frac{d\varphi}{ds}$去除$\frac{dr}{ds}$,注意到

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2=\frac{1}{2}\frac{l_0^2-1}{l_3^2}+\frac{GM}{rl_3^2}-\frac{1}{2r^2}+\frac{GM}{r^3}$$

两边继续对φ求微商,并注意到l_0与l_3是运动恒量。左边等于$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$,右边等于$\left(\frac{GM}{l_3^2}-\frac{1}{r}+\frac{3GM}{r^2}\right)\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$,所以$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{GM}{l_3^2}-\frac{1}{r}+\frac{3GM}{r^2}$,最后代入$u=GM/r$,得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\left(\frac{GM}{l_3}\right)^2+3u^2 \quad (26)$$

为了比较,写出 Maxwell 光所遵循的轨线方程,更改归一化关系,使

$$l_\beta\cdot l^\beta=g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0$$

s只具有仿射参量的一般意义。相应地$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=l_0^2-\frac{l_3^2}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)$,除以$\frac{d\varphi}{ds}$,两边对$\varphi$求微商,代入$u=GM/r$,得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=3u^2 \quad (27)$$

Proca 光的轨线方程(26)与 Maxwell 光相比,多了一个$\left(\frac{GM}{l_3}\right)^2$项。而$l_3$与频率是相关的,因此可以看出 Proca 光在引力场中的传播方式和 Maxwell 光不同,它是与其频率有关的,即是有真空色散的。

要使光线被引力场强烈地偏折,引力源的几何半径R应大致有引力半径$R_g=3GM$的量级,但是对大多数天体来说,$R\gg R_g$。在这种情况下,光线只会受引力的影响而发生微小偏折。换句话说,$u\ll 1$。观察 Proca 光的轨线方程

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\left(\frac{GM}{l_3}\right)^2+3u^2 \quad (28)$$

利用式(27),考虑到$u_0\ll 1$,略去高于二阶的小量,考虑用逐次逼近法来求解[9],得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=0$$

因为零阶近似应该对应非偏折的情况,即直线运动,所以

$$u^{(0)}=u_0\cos\varphi \quad (29)$$

这是一条垂直于极轴的直线。把零阶近似代入式(28)的左边,得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=3u_0^2\cos^2\varphi+\frac{u_0^2}{l_0^2-1} \quad (30)$$

这是一个普通的二阶非齐次线性常微分方程,有熟知的特解$u=u_0^2(1+\sin^2\varphi)+\frac{u_0^2}{l_0^2-1}$,此解加上零阶近似即一级近似

$$u^{(1)}=u_0\cos\varphi+u_0^2(1+\sin^2\varphi)+\frac{u_0^2}{l_0^2-1} \quad (31)$$

通过零阶近似与一级近似在无穷远处渐近行为的差异来计算光线的偏折。$r\to\infty$时,$u\to 0$,此时零阶近似的方位角$\varphi_\infty^{(0)}=\pm\pi/2$。假设一阶近似在无穷远处的方位角为$\varphi_\infty^{(1)}=\pm(\pi/2+\alpha)$,其中$\alpha$是小量。将$\varphi_\infty^{(1)}$代入到式(31)中,对2个三角函数作 Taylor 展开,保留到一级,得$-u_0\alpha+2u_0^2+\frac{u_0^2}{l_0^2-1}=0$,即

$$\alpha=2u_0+\frac{u_0}{l_0^2-1}$$

对偏折角θ,有

$$\theta=2\alpha=4u_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{l_0^2-1}\right) \quad (32)$$

对于 Maxwell 光,容易计算出

$$\theta_{Maxwell}=2\alpha=4u_0 \quad (33)$$

可以看到由于 Proca 光的真空色散,光在球对称引力场中的偏折变大了。比较可知引起的角度增加

$$\Delta\theta=4u_0\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{l_0^2-1}=\theta_{Maxwell}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{l_0^2-1} \quad (34)$$

因为$l_0=\frac{k_0}{\mu}=\frac{\omega}{\mu}$,可算出

$$\Delta\theta = 4u_0 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2 + o\left[\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^4\right]\right] \qquad (35)$$

为方便运算，将式(35)用普通单位制表达出来，

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{r_0c^2} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mu c}{\omega}\right)^2 + o\left[\left(\frac{\mu c}{\omega}\right)^4\right]\right] \qquad (36)$$

其中$\frac{4GM}{r_0c^2}$就是熟知的 Maxwell 光在球对称引力场中的偏折。

3 讨论及结论

现在对这个角色散作一个估计。若以太阳为例，取 $r_0 = R_\odot$，频率取射电频率的低端 $v = 1$ MHz 代入，得 $\Delta\theta = (1.75 \times 10^{-13})''$，即使对于中子星这样的天体，$M_{neu} \sim M_\odot$，$R_{neu} \sim 10$ km，也仅有 $\Delta\theta = (1.7 \times 10^{-8})''$，而已经建造的甚长基线天线阵系统 VLBA (Very Long Baseline Antenna) 角分辨率大约有$(10^{-5})''$(这相当于质量 $M = 10^7 M_\odot$，半径 $R = 8.72 \times 10^7$ m 的米切尔黑洞的引力场所引起的角色散)。可见在这种情况下，引力场对真空色散的影响远小于可以观测的精度极限。因此，对 Proca 光线在引力场中可能发生的偏转，看来应寄希望于检测精度的进一步提高和对巨质量天体的进一步观测。

参考文献：

[1] FISCHBACH E. New Geomagnetic Limits on the Photon Mass and on Long-Range Forces Coexisting with Electromagnetism[J]. Phys Rev Lett, 1994,25:514 - 517.

[2] GOLDHABER A S, NIETO M M. Terrestrial and Extraterrestrial Limits on the Photon Mass [J]. Rev Mod Phys, 1971,43:277 - 296.

[3] PLIMPTON S J, LAWTON W E. A Very Accurate Test of Coulomb,s Law of Force Between Charges [J]、Phys Rev Lett, 1936,50:1 066 - 1 071.

[4] GOLDHABER A S, NIETO M M. New Geomagnetic Limit on the Mass of the Photon[J]. Phys Rev Lett, 1968, 21: 567 - 569.

[5] DAVIS JR L, GOLDHABER A S, NIETO M M. Limit on the Photon Mass from Pioneer-10 Observation of Jupiteŕs Field[J]. Phys Rev Lett, 1975,35:1 402 - 1 405.

[6] JUN LUO, ZHONG KUN-HU , XIANG HUI-FU, et al. Determination of the Newtonian Gravitational Constant G with a Nonlinear Fitting Method [J]. Phys Rev D, 1999,59:042 001 - 042 006.

[7] 张镇久. 相对论物理学[M]. 武汉：华中师范大学出版社，1997.

[8] 韦伯 J. 广义相对论与引力波[M]. 北京：科学出版社，1979.

[9] 俞允强. 广义相对论引论[M]. (第2版). 北京：北京大学出版社，1997.

Deflection of Proca Light Ray Caused by Schwarzschild Gravitational Field

DAI Hong-xia[1,2], *SHI Dong-ping*[1,3], *LONG Bing-wei*[4]

(1. College of Mathematics and Sciences, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. Department of Physics, Chongqing Technology Business University, Chongqing 400067, China;

3. Department of Physics, Western Chongqing University, Chongqing 402168, China;

4. Department of Physics, University of Arizona, U. S. A)

Abstract: Testing the rest mass of photon is important to prove "permanence principle of speed of light", which is one of the theoretical bases of Special Theory of Relativity. Almost all means of measurements performed failed to take into account the existence of gravitational fields. The maximal values of the rest mass of a photon has been obtained: $m_r \leqslant 7 \times 10^{-50}$g. The influence caused by gravitational field is discussed. We calculate the corresponding deflection of the light ray of Proca photons with the rest mass, which is caused by the spherically symmetric gravitational field. The results indicate that this effect might to change the deflecting angle, but the variation $\Delta\theta$ will be extremely small.

Key words: rest mass of photon; proca equations; spherically symmetric gravitational field

(责任编辑 张 苹)