2003 年 4 月 重庆大学学报 Apr. 2003
第 26 卷第 4 期 Journal of Chongqing University Vol. 26 No. 4

文章编号:1000 - 582X(2003)04 - 0066 - 04

涉及微分多项式的亚纯函数唯一性*

章启兵
(重庆大学 数理学院,重庆 400044)

摘 要:研究了亚纯函数在零点与极点处满足一定的亏量条件下与其微分多项式分担一个值的唯一性问题,推广和改进了邱淦佛等人的有关定理,主要结果如下:设f是开平面内非常数亚纯函数,b为任一非零有穷复数,F为f的常系数齐次微分多项式,且F不恒为常数,其次数是λ,权是Γ. 若f,F分担b IM,$(3\lambda+2)\delta(0,f)+(2\Gamma-2\lambda+6)\Theta(\infty,f)>2\Gamma+8$. 则$f=F$,或$f\cdot F=b^2$.

关键词:分担值; 微分多项式; 唯一性; 小函数
中图分类号:O17452 **文献标识码**:A

1 主要结果

设f和g是开平面内两个非常数亚纯函数,a为任一复数,若$f-a$和$g-a$的零点相同,计算重级(忽略重级),则称f与g以a为$CM(IM)$公共值。

$P=\prod_{i=0}^{s}(f^{(i)})^{n_i}$,$F=\sum_{i=0}^{n}a_i f^{a_{i0}}(f')^{a_{i1}}\cdots(f^{(k_i)})^{a_{ik_i}}$分别称为$f$的微分单项式和微分多项式。$r_p=\sum_{i=0}^{s}n_i$,称为$P$的次数。$\lambda_i=a_{i0}+a_{i1}+\cdots a_{ik_i}$,$\lambda=\max_i\{\{\lambda_i\}$,$a=\min_i\{\lambda_i\}$,$\lambda$称为$F$的次数。如果$\lambda=a$,则$F$称为$f$的齐次微分多项式。$\Gamma_i=a_{i0}+2a_{i1}+\cdots+(k_i+1)a_{ik_i}$,$\Gamma=\max_i\{\Gamma_i\}$,$\Gamma$称为$F$的权数。

笔者采用 Nevanlinna 理论的常用记号和术语如:$T(r,f)$,$m(r,f)$,$N(r,f)$,$\overline{N}(r,f)$ $S(r,f)$ 等[1]。最近,邱淦佛,郑赛莺,江兆林等证明了:

定理 A[2] 设f是非常数的整函数,k是正整数,b是非零有穷复数,若f和$f^{(k)}$ IM分担值b,且$\delta(0,f)>\frac{4}{5}$,则$f=f^{(k)}$.

定理 B[3] 设f是非常数的整函数,$P(f)$是f的微分单项式,$P(f)=\prod_{i=0}^{s}(f^{(i)})^{n_i}$,其次数$r_p$,$b(\neq 0)$是$f$和$P$的$IM$分担值。如果$\delta(0,f)>\frac{2+2r_p}{3+2r_p}$,则$f=P$,或$f\cdot P=b^2$.

定理 C[4] 设f是非常数的亚纯函数,k是正整数,b是非零有穷复数,b是f和$f^{(k)}$的IM分担值。若有:$5\delta(0,f)+(5+3k)\Theta(\infty,f)>9+3k$,则$f=f^{(k)}$.

笔者证明了下述定理:

定理 1 设f是开平面内非常数亚纯函数,b为任一非零有穷复数,F为f的常系数齐次微分多项式,$F=\sum_{i=0}^{n}a_i f^{a_{i0}}(f')^{a_{i1}}\cdots(f^{(k_i)})^{a_{ik_i}}$,且$F$不恒为常数,其次数是$\lambda$,权是$\Gamma$. 若$f$,$F$分担$b$ IM,

$$(3\lambda+2)\delta(0,f)+(2\Gamma-2\lambda+6)\Theta(\infty,f)>2\Gamma+8 \tag{1}$$

则$f=F$,或$f\cdot F=b^2$.

推论 1 f,F,b均同定理 1. 如果f,F分担b IM,$\Theta(\infty,f)=1$,$\delta(0,1)>\frac{2+2\lambda}{2+3\lambda}$. 则$f=F$,或$f\cdot F=b^2$。

显然推论 1 推广和改进了定理B。

推论 2 设f是非常数的亚纯函数,k是正整数,b是非零有穷复数,b是f和$f^{(k)}$的IM分担值,若有:$5\delta(0,f)+(6+2k)\Theta(\infty,f)>10+2k$,则$f=f^{(k)}$.

注:由定理C的条件:$5\delta(0,f)+(5+3k)\Theta(\infty,f)>9+3k$,很容易推出推论 2 的条件:$5\delta(0,f)+(6+2k)\Theta(\infty,f)>10+2k$. 这说明推论 2 是定理$C$的改进。

* 收稿日期:2002 - 11 - 16
作者简介:章启兵(1969 -),男,湖北荆州人,重庆大学硕士研究生,主要研究方向:亚纯函数值分布论研究。

显然，定理 A 是推论 2 的特殊情况。

推论 3　设 f 是非常数的亚纯函数，满足 $N(r,f)=s(r,f)$，k 是正整数，b 是非零有穷复数，$F=a_0f+a_1f'+\cdots+a_kf^{(k)}$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_k$ 是 f 的小函数，且 $a_k\neq 0$. 若 f,F IM 分担值 b，且 $\delta(0,f)>\frac{4}{5}$，则 $f=F$.

2　引理

引理 1　f,F 同定理 1，则 $N\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant T(r,F)-\lambda T(r,f)+\lambda N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)$.

证：由对数导数引理及第一基本定理得：

$$m\left(r,\frac{1}{f^{\lambda}}\right)\leqslant m\left(r,\frac{F}{f^{\lambda}}\right)+m\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right)+S(r,f).$$

从而：$\lambda T(r,f)-\lambda N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant T(r,F)-N\left(r,\frac{1}{F}\right)+S(r,f)$. 因而得引理 1.

引理 2　f 和 F 同定理 1，则 $N\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant\lambda\cdot N\left(r,\frac{1}{f}\right)+(\Gamma-\lambda)\overline{N}(r,f)+S(r,f)$.

证明：由引理 1：

$$N\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant T(r,F)-\lambda T(r,f)+\lambda N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)\tag{2}$$

又因为 F 的极点只能来自 f 的极点，f 的 k 阶极点是 F 的至多 $k\lambda+(\Gamma-\lambda)$ 阶极点，故：

$$\begin{aligned}T(r,F)&=m(r,F)+N(r,F)\leqslant m\left(r,\frac{F}{f^{\lambda}}\right)+\\&m(r,f^{\lambda})+\lambda N(r,f)+(\Gamma-\lambda)\overline{N}(r,f)\leqslant\\&\lambda T(r,f)+(\Gamma-\lambda)\overline{N}(r,f)+S(r,f)\end{aligned}\tag{3}$$

由(2)，(3) 得：

$$N\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant\lambda\cdot N\left(r,\frac{1}{f}\right)+(\Gamma-\lambda)\overline{N}(r,f)+S(r,f)\tag{4}$$

引理 3　f,F,b 同定理 1，则：$S(r,f)=S(r,F)$

证明：根据第二基本定理：$T(r,F)\leqslant\overline{N}(r,F)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-b}\right)+S(r,f)$. 结合引理 1 得：$\lambda\cdot T(r,f)\leqslant\overline{N}(r,f)+\lambda\cdot N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-b}\right)+S(r,f)$. 由此式易证引理 3.

下面，把 $S(r,f)$，$S(r,F)$ 都用 $S(r,f)$ 表示，不再说明。

引理 4[1]　设 f_1,f_2,a_1,a_2,a_3 是亚纯函数，满足 $T(r,a_i)=o(T(r))$，$(r\notin E,i=1,2,3)$，其中 $T(r)=\max\{T(r,f_1),T(r,f_2)\}$，$a_1,a_2,a_3$，均不恒等于零，如果 $a_1f_1+a_2f_2=a_3$，则：

$$T(r,f_j)<\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_2}\right)+\overline{N}(r,f_j)+o(T(r))\qquad(r\notin E,j=1,2)$$

引理 5[1]　设 $f_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个线性无关的亚纯函数，满足 $\sum_{j=1}^{n}f_j=1$. 则：

$$T(r,f_j)\leqslant\sum_{i=1}^{n}N\left(r,\frac{1}{f_i}\right)+N(r,f_j)+N(r,D)-\sum_{i=1}^{n}N(r,f_i)-N\left(r,\frac{1}{D}\right)+o(T(r))\quad r\notin E$$

$j=1,2,\cdots,n$. 其中 D 是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的 Wronskian 行列式，$T(r)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{T(r,f_i)\}$，$E$ 是线性测度为有穷的正实数 r 的一个子集。

引理 6[5]　设 f 是开平面上满足 $N(r,f)=S(r,f)$ 的非常数亚纯函数，$a_{-1},a_0,a_1,\cdots,a_k,(k\geqslant 1)$，$a,b$ 是 f 的小函数，a_k 不恒等于零，a 不恒等于 b，$g=a_{-1}+a_0f+a_1f'+\cdots+a_kf^{(k)}$. 若 f 和 g 几乎 CM 分担 a 和 b，则 $f\equiv g$.

3　定理 1 的证明

首先，引入以下记号，设 f 为亚纯函数，z_0 为任一复数。令：

$$V(f,z_0)=\begin{cases}l & \text{若 } z_0 \text{ 是 } f \text{ 的 } l \text{ 级极点}\\0 & \text{若 } z_0 \text{ 不是 } f \text{ 的极点}\end{cases}$$

$$V\left(\frac{1}{f},z_0\right)=\begin{cases}l & \text{若 } z_0 \text{ 是 } f \text{ 的 } l \text{ 级零点}\\0 & \text{若 } z_0 \text{ 不是 } f \text{ 的零点}\end{cases}$$

设：

$$\frac{F-b}{f-b}=\psi\tag{5}$$

分两种情况讨论：

情况 1：若 $\psi=c$(常数($\neq 0$))，则由(5) 有：

$$F-cf=(1-c)b\tag{6}$$

当 $c\neq 1$ 时，由引理 4 得：

$$T(r,F)<N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\tag{7}$$

结合引理 1 得：

$$\lambda T(r,f) < (\lambda+1)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f) \tag{8}$$

从而：$(\lambda+1)\delta(0,f)+\Theta(\infty,f)\leqslant 2$. 这与(1) 矛盾。从而 $c=1$，所以：$f=F$.

情况2：ψ 不恒为常数，令 $f_1=\frac{F}{b}, f_2=-\frac{f\psi}{b}, f_3=\psi$. 则由(5) 得：

$$o\{T(r)\}=S(r,f)，其中\ T(r)=\max_i T(r,f_i)，且\ f_1+f_2+f_3=1 \tag{9}$$

若 f_1,f_2,f_3 线性无关，由引理5 得：

$$T(r,F) < N\left(r,\frac{1}{F}\right)+NN\left(r,\frac{1}{f\psi}\right)+\left(r,\frac{1}{\psi}\right)-N(r,f\psi)-N(r,\psi)+N(r,D)-N\left(r,\frac{1}{D}\right)+S(r,f) \tag{10}$$

由 $N\left(r,\frac{1}{f\psi}\right)-N(r,f\psi)=N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)-N(r,f)-N(r,\psi)$[6] 并结合引理1 得：

$$\lambda T(r,f) < (\lambda+1)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left[2N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)-2N(r,\psi)+N(r,D)-N\left(r,\frac{1}{D}\right)\right]-N(r,f)+S(r,f) \tag{11}$$

又：$D=-\frac{1}{b}(F'\psi''-F''\psi')$.

从式(5) 知：ψ 的极点与零点只可能来自 $f-b, F-b$ 的零点以及 f 的极点处。

下面估计 $2N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)-N\left(r,\frac{1}{D}\right)+N(r,D)-2N(r,\psi)$，现设 z_0 是 $f-b$ 的点 m 重零点，$F-b$ 的 n 重零点，令：$V(z_0)=2V\left(\frac{1}{\psi},z_0\right)-V\left(\frac{1}{D},Z_0\right)+V(D,z_0)-2V(\psi,z_0)$，容易算出：若 $m=n$，则 $V(z_0)\leqslant 0$；若 $m>n$，则 $V(z_0)\leqslant 1$；若 $m<n$，则 $V(z_0)\leqslant 2$.

又设 z_1 是 f 的 k 级极点，是 F 的 p 级极点，容易得到：$V(z_1)\leqslant k+3$.

从上面讨论得知：

$$2N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)-N\left(r,\frac{1}{D}\right)+N(r,D)-2N(r,\psi)\leqslant \overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+2\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{F-b}\right)+N(r,f)+3\overline{N}(r,f) \tag{12}$$

由(11)，(12) 得：

$$\lambda T(r,f) < (\lambda+1)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{F'}\right)+3\overline{N}(r,f)+S(r,f) \tag{13}$$

又：
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f) \tag{14}$$

由引理2 得：

$$N\left(r,\frac{1}{F'}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}(r,F)+S(r,f)\leqslant \lambda N\left(r,\frac{1}{f}\right)+(\Gamma-\lambda+1)\overline{N}(r,f)+S(r,f) \tag{15}$$

由(13)，(14)，(15) 得：

$$\lambda T(r,f) < (3\lambda+2)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+(2\Gamma-2\lambda+6)\overline{N}(r,f)+S(r,f) \tag{16}$$

从而：$(3\lambda+2)\delta(0,f)+(2\Gamma-2\lambda+6)\Theta(\infty,f)\leqslant 2\Gamma+8$，与条件(1) 矛盾。所以 f_1,f_2,f_3 线性相关，即存在一组不全为零的数 c_1,c_2,c_3，使：

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0 \tag{17}$$

因为 c_2,c_3 中至少有一个不为零，若 $c_2\neq 0$，由(9)，(17) 得：

$$\left(1-\frac{c_1}{c_2}\right)\frac{F}{b}+\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)\psi\equiv 1 \tag{18}$$

因为 F,ψ 都不为常数，所以 $\left(1-\frac{c_1}{c_2}\right)\neq 0, \left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)\neq 0$

由引理4 得：

$$T(r,F) < N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f) \tag{19}$$

又：
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{F'}\right)+\overline{N}(r,f)\leqslant N\left(r,\frac{1}{F}\right)+2\overline{N}(r,f)+S(r,f) \tag{20}$$

由引理1，引理2，(19)，(20) 得：$\lambda T(r,f) < 2\lambda N\left(r,\frac{1}{f}\right)+(\Gamma-\lambda+3)\overline{N}(r,f)+S(r,f)$ 与(1) 矛盾。

故 $c_2=0$，从而：

$$f_3=-\frac{c_1f_1}{c_3} \tag{21}$$

由(9)，(21) 得：

$$\left(1-\frac{c_1}{c_3}\right)f_1+f_2\equiv 1 \tag{22}$$

若 $c_1\neq c_3$，由引理4 得：

$$T(r,F) < N\left(r,\frac{1}{F}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{f\psi}\right) + \overline{N}(r,f) + S(r,f) \qquad (23)$$

由引理 1，(23)，(20)，(4) 得：$\lambda T(r,f) < (2\lambda+1)N\left(r,\frac{1}{f}\right) + (\Gamma-\lambda+3)\overline{N}(r,f) + S(r,f)$ 与(1)矛盾。

所以：$c_1 = c_3$ 从而：$f_3 = -f_1$，再结合(9)得：$f_2 = 1$，故：$f \cdot F = b_2$.

注：从定理 1 的证明过程可以看出，若 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 f 的小函数，定理 1 的结论仍然成立。

推论 2 的证明　由定理 1，有 $f = f^{(k)}$ 或 $f \cdot f^{(k)} = b^2$. 若 $f \cdot f^{(k)} = b^2$，则易得：$f, f^{(k)}$ CM 分担 b. 这时显然有 0 是 $f, f^{(k)}$ 的 Picard 例外值，从而由文献[1]中的定理 8.13 得：$f = f^{(k)}$.

推论 3 的证明　由定理 1，有 $f = F$，或 $f \cdot F = b^2$. 若 $f \cdot F = b^2$，则 f, F CM 分担 b，显然 f，F CM 分担 0，又 $N(r,f) = s(r,f)$，从而由引理 6 得：$f = F$.

致谢：衷心感谢导师顾永兴教授的指导与鼓励。

参考文献：

[1] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京：科学出版社，1995.

[2] QIU GANDI, JIANG ZHAOLIN. Entire function that sharing a value with their derivatives [J]. Joural of Mathematical Study, 1997, 30(1): 9 - 13.

[3] 郑赛莺，邱淦弟. 与其微分单项式具有一 IM 公共值的整函数[J]. 湖南数学年刊，1997，17(3)：100 - 103.

[4] 郑赛莺. 与其 k 阶导数具有一 IM 公共值的亚纯函数[J]. 宁德师专学报，1997，9(2)：101 - 104.

[5] 王建平. 亚纯函数及其微分多项式的唯一性[J]. 数学研究与评论，2002，22(2)：253 - 260.

[6] 顾永兴. 亚纯函数的正规族[M]. 成都：四川教育出版社，1991.

Unicity of Meromorphic Functions Concerning Differential Polynomials

ZHANG Qi-bing

(College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: We study the problems of uniqueness of meromorphic functions whichsharing one value with it's differential Polynomials, generalize and improve some theorems of Qiu - Gandi and Zheng Saiying, et al. Let f be a nonconstant meromorphic function, b be a finite nonzero complex number, F be a homogeneous differential polynomial of f with constant coefficient, their degree and weight are λ, Γ respectively, if f and F share b IM and $(3\lambda+2)\delta(0,f) + (2\Gamma-2\lambda+6)\Theta(\infty,f) > 2\Gamma+8$, then $f = F$ or $f \cdot F = b^2$.

Key words: share value; differential polynomial; uniqueness; small function

（责任编辑　吕赛英）