文章编号:1000 - 582X(2003)04 - 0122 - 03

基于改进一阶摄动法的模态高精度展开法*

范 文 亮,李 正 良
(重庆大学 土木工程学院,重庆 400045)

摘 要:特征值与特征向量的确定是振型分解反应谱法的前提,特别是对于需要进行多次重分析的结构,快速、准确地确定其特征值与特征向量具有非常重要的意义。目前常用的适用于结构快速重分析的改进一阶摄动法,其摄动特征解的计算前提是已知原结构所有的初始模态,这通常很难做到;而若采用普通的截尾模态法往往又会产生较大的误差。为此,考虑到高阶模态的影响,提出了基于改进一阶摄动法的模态高精度展开法,算例表明,此方法能显著地改善摄动特征解的精度。

关键词:改进一阶摄动法; 截尾模态法; 高精度展开法;
中图分类号:TU 311.3 **文献标识码**:A

振型分解反应谱法是计算建筑结构水平地震作用最常用的方法。对于一般的建筑物,计算出结构的所有模态向量是非常繁琐,亦是不必要的,因为结构的水平地震作用起主要作用的往往只有前几阶模态[1-2]。并且对于需要进行多次内力重分析的结构(如基于等效线性化的耗能减震结构的设计[3]或结构的优化设计[4]),如采用传统的重复计算特征问题的特征解的方法其工作量是相当巨大的。有鉴于此,文献[5-6]中提出了一种全新的用于结构快速重分析的一阶、二阶矩阵摄动法以及一阶摄动法与 Rayleigh 商相结合的改进摄动法。但当结构参数改变较大时,必须采用基于低阶摄动法的迭代摄动法,为以最少计算量达到最好的精度,一般以改进一阶摄动法为基础进行迭代计算。

对于离散系统的振动特征问题

$$[\boldsymbol{K}]\{u\} = \lambda[\boldsymbol{M}]\{u\} \tag{1}$$

式(1)中$[\boldsymbol{K}]$为结构刚度矩阵,$[\boldsymbol{M}]$为质量矩阵,$\lambda = \omega^2$,ω为固有频率,$\{\boldsymbol{u}\}$为模态向量。文献[5-6]基于摄动理论推导出结构参数有小改变时特征解改进的一阶摄动公式如下:

$$\{\boldsymbol{u}_i\}' = \{\boldsymbol{u}_{0i}\} + \sum_{j=1}^{n} C_j\{\boldsymbol{u}_{0j}\} \tag{2}$$

且
$$C_j = \frac{1}{\lambda_{0j} - \lambda_{0i}}\{\boldsymbol{u}_{0j}\}^T(\Delta\lambda_{1i}[\boldsymbol{M}] + \lambda_{0i}[\boldsymbol{M}_1] - [\boldsymbol{K}_1])\{\boldsymbol{u}_{1i}\}' \quad (j \neq i) \tag{3}$$

$$C_i = -\frac{1}{2}\left(\{\boldsymbol{u}_{1i}\}'^T[\boldsymbol{M}_1]\{\boldsymbol{u}_{1i}\}' + \Delta\{\boldsymbol{u}_{1i}\}^T[\boldsymbol{M}]\Delta\{\boldsymbol{u}_{1i}\}\right) \quad (j = i) \tag{4}$$

$$\lambda'_i = \frac{\{\boldsymbol{u}_{1i}\}'^T[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{u}_{1i}\}'}{\{\boldsymbol{u}_{1i}\}'^T[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{u}_{1i}\}'} \tag{5}$$

上述各式中,$[\boldsymbol{K}]$、$[\boldsymbol{M}]$为修改后结构的刚度及质量矩阵,$[\boldsymbol{K}_1]$、$[\boldsymbol{M}_1]$代表两者的修改量,λ_{0i}、$\{\boldsymbol{u}_{0i}\}$为修改前系统的特征解,$\{\boldsymbol{u}_{1i}\}'$、λ'_{1i}为修改后系统的特征问题的一阶摄动解,$\{\boldsymbol{u}_i\}'$、λ'_i为修改后系统的特征问题的改进一阶摄动解,$\Delta\{\boldsymbol{u}_{1i}\} = \{\boldsymbol{u}_{1i}\}' - \{\boldsymbol{u}_{0i}\}$、$\Delta\lambda_{1i} = \lambda'_{1i} - \lambda_{0i}$分别为系统参数而引起特征解的一阶摄动。

由上述各式可知,改进的一阶摄动模态向量的求解,需预先求解出原系统全部 n 个特征值对应的模态向量。正如上述,这是很难做到亦无此必要。但是如果只取前 l 阶模态,也即通常所谓的截尾模态法,其所能达到的精度是不高的。为此,可导出基于改进一阶摄动法的考虑高阶模态影响的模态高精度展开法。

* 收稿日期:2002-12-20
基金项目:高等学校骨干教师资助计划项目(教技司[2000]65 号)
作者简介:范文亮(1979-),男,江西九江人,重庆大学硕士研究生,主要从事结构抗震及减震研究。

1 模态向量的高精度展开法

如果已知前 l 阶模态，根据式(2)，采用模态截断法有[5-7]：

$$\{u_i\}' = \{u_{0i}\} + \sum_{j=1}^{l} C_j \{u_{0j}\} \tag{6}$$

为改善式(6)的精度，必须考虑高阶模态的影响，将式(2)改写为

$$\{u_i\}' = \{u_{0i}\} + \sum_{j=1}^{l} C_j \{u_{0j}\} + \{R\} \tag{7}$$

其中

$$\{R\} = \sum_{j=l+1}^{n} C_j \{u_{0j}\} = \sum_{j=l+1}^{n} \frac{1}{\lambda_{0j} - \lambda_{0i}} \{u_{0j}\}^{\mathrm{T}} \cdot (\Delta\lambda_{1i}[M] + \lambda_{0i}[M_1] - [K_1])\{u_{1i}\}'\{u_{0j}\} = [U_{0h}][C_{jh}] = [U_{0h}]([\Lambda_{0h}] - \lambda_{0i}[I])^{-1}[U_{0h}]^{\mathrm{T}}\{T\} \tag{8}$$

式(8)中，$[U_{0h}]$、$[\Lambda_{0h}]$ 分别为未知的高阶模态矩阵和高阶特征值对角阵，$[I]$ 为单位阵，且

$$T = (\Delta[\Lambda_{1l}][M] + [\Lambda_{0l}][M_1] - [K_1])[U_{1l}]' \tag{9}$$

其中，$[\Lambda_{0l}]$ 为原系统已知低阶特征值对角阵，$\Delta[\Lambda_{1l}]$、$[U_{1l}]'$ 分别为参数修改引起的已知低阶特征值的摄动矩阵和已知低阶模态的一阶摄动解矩阵。由

$$[\Lambda_{0h}] - \lambda_{0i}[I])^{-1} = [\Lambda_{0h}]^{-1} + \lambda_{0i}[\Lambda_{0h}]^{-2} + \lambda_{0i}^2[\Lambda_{0h}]^{-3} + \cdots$$

有

$$\{R\} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{0i}^j [U_{0h}][\Lambda_{0h}]^{-j-1}[U_{0h}]^{\mathrm{T}}\{T\} \tag{10}$$

又

$$[K_0][U_{0l} \vdots [U_{0h}] = [M_0][U_{0l} \vdots [U_{0h}]\mathrm{diag}(\Lambda_{0l}, \Lambda_{0h}) \tag{11}$$

对式(11)左乘 $[U_{0l} \vdots [U_{0h}]^{\mathrm{T}}$ 后，等式两边求逆化简可得

$$[U_{0h}][\Lambda_{ah}]^{-1}[U_{ah}]^{\mathrm{T}} = [K_0]^{-1} - [U_{0l}][\Lambda_{al}]^{-1}[U_{0l}]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

对式(12)右乘 $[M_0][K_0]^{-1}$ 后化简得

$$[U_{0h}][\Lambda_{0h}]^{-2}[U_{0h}]^{\mathrm{T}} = [K_0]^{-1}[M_0][K_0]^{-1} - [U_{0l}][\Lambda_{0l}]^{-2}[U_{0l}]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

依此类推有

$$[U_{0h}][\Lambda_{0h}]^{-j-1}[U_{0h}]^{\mathrm{T}} = [K_0]^{-1} \underbrace{([M_0][K_0]^{-1} \cdots [M_0][K_0]^{-1})}_{j} - [U_{0l}][\Lambda_{0l}]^{-j-1}[U_{0l}]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

把式(14)代入式(10)可得

$$\{R\} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{0i}^j ([K_0]^{-1} \underbrace{([M_0][K_0]^{-1} \cdots [M_0][K_0]^{-1})}_{j} - [U_{0l}][\Lambda_{0l}]^{-j-1}[U_{0l}]^{\mathrm{T}})\{T\} \tag{15}$$

由于 $\{R\}$ 为一无穷求和级数，作为误差修正项，在运用中，通常只取级数的前几项，亦可通过设定其前 $k+1$ 项与前 k 项之差小于某一给定精度来人为控制其取值，但是由于式(15)含有 $[\Lambda_{0l}]^{-j-1}$ 项，当精度要求较高且 $[\Lambda_{0l}]$ 数值较小时，可能会出现数值溢出的现象，因此在迭代过程中应尽量避免。

2 数值算例

为比较基于改进一阶摄动法的模态高精度展开法与一般截尾模态法的性能差异，取原结构质量矩阵及刚度矩阵如下：

$$[M_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

取结构质量矩阵和刚度矩阵的修改为

$$[M_1] = 0.15 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_1] = 0.15 \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以全部初始模态基础上求解出的改进一阶摄动模态解为标准解。然后只取前两阶初始模态计算改进一阶摄动的前两阶模态解。并取模态向量误差模计算式为 $e = (\{|u_E|\} - \{|u_I|\})^{\mathrm{T}}(\{|u_E|\} - \{|u_I|\})$，其中 $\{u_E\}$ 为模态标准解，$\{u_I\}$ 截尾模态解。其计算结果见表 1。

表 1 模态高精度展开法计算结果

标准解		取前两阶初始模态					
		无修正		取 1 项修正项		取 3 项修正项	
u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2
0.231 2	0.525 2	0.210 4	0.477 0	0.230 2	0.509 3	0.231 2	0.523 1
0.380 2	0.518 0	0.386 5	0.549 8	0.380 4	0.525 9	0.380 2	0.518 5
0.495 8	0.143 4	0.508 8	0.148 4	0.496 5	0.148 9	0.495 8	0.144 8
0.578 7	-0.402 2	0.576 0	-0.404 1	0.578 6	-0.403 3	0.578 7	-0.402 4
0.607 2	-0.645 0	0.596 7	-0.657 2	0.606 6	-0.651 2	0.607 2	-0.646 4
误差模 e		$7.5E-04$	$3.5E-03$	$1.7E-06$	$3.8E-04$	$9.8E-12$	$8.3E-06$

从表中数据可知,采用本文提出的基于改进一阶摄动法的高精度截尾模态展开法可有效地提高改进一阶摄动模态的精度,且所取修正项数越多,精度越高。

3 结 论

取少数低阶初始模态,运用改进一阶摄动法计算结构修改后的前几阶模态,误差往往较大,利用本文的基于改进一阶摄动法的模态高精度展开法,在计算量增加不大的前提下可有效地改善摄动模态解的精度。

参考文献:

[1] 李杰,李国强. 地震工程学导论[M]. 北京:地震出版社,1992.

[2] 胡聿贤. 地震工程学[M]. 北京:地震出版社,1988.

[3] 欧进萍,吴斌,龙旭. 耗能减振结构的抗震设计方法[J]. 地震工程与工程振动,1998,18(2):98-107.

[4] 孙焕纯,柴山,王跃方. 离散变量结构优化设计[M]. 大连:大连理工大学出版社,1995.

[5] 陈塑寰. 结构动态设计的矩阵摄动理论[M]. 北京:科学出版社,1999.

[6] 陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论[M]. 重庆:重庆出版社,1991.

[7] 童昕. 粘弹阻尼结构频响函数计算的高精度模态展开法[J]. 工程力学,2000,17(5):74-78.

An Accurate Expansion Method for Modes Based on the Improved First-Order Perturbation

FAN Wen-liang , LI Zheng-liang

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: The premise for improved first-order perturbation is that all original modes of structure have been known. It will take much error for modes if the conventional method of truncated higher frequency modes is used. Taking higher frequency modes into account, an accurate expansion method based on the improved first-order perturbation is put forward, which can improve the precise of modes obviously.

Key words: the improved first-order perturbation; the method of truncated higher frequency modes; an accurate expansion method

(责任编辑 姚 飞)