

文章编号:1000-582X(2003)05-0129-04

分数阶傅里叶变换的数值实现*

陈明杰

(重庆工商大学 计算机与信息工程学院,重庆 400067)

摘要:信号及其傅里叶变换可以分别反映信号在时频两域内的信息。傅里叶变换是一种常用的数学工具,在数学、物理及工程技术领域都得到了十分广泛的应用。介绍了一种崭新的信号分析工具——分数阶傅里叶变换,并用经典的傅里叶变换的观点对分数阶傅里叶变换进行了解释。对于分数阶傅里叶变换的实现,因一般情况下分数阶傅里叶变换给不出解析表达式,故分数阶傅里叶变换的数值算法的研究是十分重要的。给出了分数阶傅里叶变换的较准确的数值计算方法。利用此方法对被线性调频函数污染混叠的高斯信号进行了滤波分离。

关键词:分数阶傅里叶变换;傅里叶变换;滤波;干扰

中图分类号:O174.22

文献标识码:A

傅里叶变换是一种常用的数学工具,在数学、物理及工程技术领域都得到了广泛的应用。近年来,人们又从不同的角度提出了一种广义化的傅里叶变换——分数阶傅里叶变换^[1],作为一种广义化的傅里叶变换,提供了傅里叶变换所不具备的某些特点^[2]。最近几年,分数阶 Fourier 变换在微分方程求解、量子力学^[3]、衍射理论和光学传输、光学系统和光学信号处理^[4-8]时变滤波和多路传输^[9]、扫描频率滤波器、人工神经网络^[10]、小波变换^[9]和时频分析^[11]等诸多领域中获得应用,展现了较广阔的应用前景。对于分数阶傅里叶变换的实现,分数阶傅里叶变换数值算法的研究是十分重要的,因一般情况下分数阶傅里叶变换给不出解析表达式。下面介绍一种快速的分数阶傅里叶变换计算方法^[12]。

1 分数阶傅里叶变换

用 $\{Fx\}(t)$ 表示函数 $x(t)$ 傅里叶变换,容易验证 $F^2x(t) = x(-t)$ 和 $F^4x(t) = x(t)$ 。在这里, F^n 表示算子 F 连续使用了 n 次。如图 1 所示, $Fx(t)$ 是一种将函数 $x(t)$ 旋转 $\pi/2$, 变到 f 轴上的表示形式,即一函数在与时间轴夹角为 $\pi/2$ 轴上的表示就是该函数的 Fou-

rier 变换; F^2 相当于 t 轴的 2 次连续 $\pi/2$ 旋转,因此得到一个指向为 $-t$ 的轴;而 F^4 表示对 $x(t)$ 进行 4 次连续的 $\pi/2$ 旋转,所得结果与原函数完全相同。若进行角度 α 不等于 $\pi/2$ 整数倍的旋转,即为分数阶傅里叶变换。信号 $x(t)$ 的具有角度 $\alpha = p\pi/2$ 的 p 阶分数阶

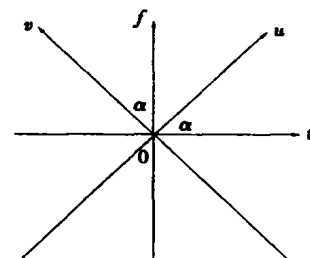


图 1 (t, f) 平面旋转 α 角变成 (u, v) 平面旋转 Fourier 变换定义为

$$\begin{aligned} \{R^\alpha x\}(u) &= \{F^p x\}(u) = X_p(u) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_p(t, u) dt = \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} dt & \text{若 } \alpha \neq n\pi \\ x(t) & \text{若 } \alpha = 2n\pi \\ x(-t) & \text{若 } \alpha = (2n+1)\pi \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

* 收稿日期:2003-01-13

作者简介:陈明杰(1972-),男,重庆人,重庆工商大学讲师,重庆大学硕士,从事信号处理研究。

这里, $\alpha = p\pi/2$ 。

2 时间和频率的无量纲化

一个函数称为紧致的,若它的非零值只限定在一个有限的区间内。众所周知,一个函数和它的 Fourier 变换不可能二者都是紧致的,除非他们恒等于零。在实际中,我们总是对有限时间间隔和有限带宽(频率)感兴趣。

假定信号的时域表示近似定义在区间 $[-\Delta t/2, \Delta t/2]$ 内,并且其频域表示近似定义在区间 $[-\Delta f/2, \Delta f/2]$ 内。信号的有限区间表示等价于假定:信号能量绝大部分集中在这些区间内。对于一给定的函数类,这一假定可以通过选择足够大的 Δt 和 Δf 予以保证。定义时间-带宽乘积 $N = \Delta t\Delta f$ 。注意,根据不确定性原理,恒有 $N > 1$ 。

通过无量纲化,可以将时域和频域分别转换为无量纲的域。具体方法是引入尺度参数 s ,它具有时间量纲,并定义尺度化坐标 $x = t/s$ 和 $v = fs$ 。这样一来, x 和 v 即成为无量纲坐标。借助这些新坐标,时域和频域表示将分别定义在区间 $[-\Delta t/2s, \Delta t/2s]$ 和 $[-s\Delta f/2, s\Delta f/2]$ 内。选择 $s = \sqrt{\Delta t/\Delta f}$,以使两个区间的长度现在都等于无量纲 $\Delta x = \sqrt{\Delta f\Delta t}$,即区间均为 $[-\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta x]$ 。

在新定义的直角坐标里,信号即用样本间隔为 $\Delta x^{-1} = 1/\sqrt{N}$ 的 $N = (\Delta x)^2$ 个样本表示。把时间量纲 t 和频率量纲 f 转换为同一无量纲 x 的操作称为量纲归一化。因此,在量纲归一化后,在分数阶 Fourier 变换和 Wigner-Ville 分布等定义中的坐标便都成了无量纲的坐标。

假定在所有域内的信号表示都定义在以原点为中心、长度等于的间隔内,这等价于假定 Wigner-Ville 分布定义在直径 Δx 的圆内。也就是说,假定信号的绝大部分能量都集中在该圆内,这可以通过选择 Δx 足够大来保证。当然,从减少计算的角度出发,我们又希望 Δx 尽可能小。在下面考虑分数阶 Fourier 变换的数值计算的情况下,假定 Δx 取整数,而且在新定义的坐标里,信号在时域和频域都用 $N = (\Delta x)^2$ 个样本表示,即样本间隔 $\Delta x^{-1} = 1/\sqrt{N}$ 。

3 分数阶傅里叶变换的数值实现方法

假定 $P \in [-1, 1]$,则可以将经过量纲归一化的信号 $f(x)$ 的分数阶变换式分解为以下 3 步运算:

$$f_p(x) = \exp[-j\pi x^2 \tan(\alpha/2)] g'(x) \quad (2)$$

$$g'(x) = A_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\pi\beta(x-x')^2] g(x') dx' \quad (3)$$

$$g(x) = \exp[-j\pi x^2 \tan(\alpha/2)] f(x) \quad (4)$$

式中, $a = p\pi/2, \beta = \csc\alpha$ 而 $g(x)$ 和 $g'(x)$ 表示中间计算结果,并且

$$A_\alpha = \frac{\exp(-j\pi \operatorname{sgn}(\sin\alpha)/4 + ja/2)}{|\sin\alpha|^{1/2}} \quad (5)$$

即是说,分数阶变换的数值计算的顺序如下:先计算式(4),计算式(3),最后计算式(2)。下面是每一步计算的有关细节。

第 1 步,将函数 $f(x)$ 与调频函数相乘。注意, $g(x)$ 的频率带宽与时间带宽乘积可以是 $f(x)$ 的相应带宽乘积的两倍,所以要求 $g(x)$ 的采样间隔为 $1/(2\Delta x)$ 。如果样本值 $f(x)$ 的采样间隔是 $1/\Delta x$,那么就需要对这些样本值进行插值,然后再与线性调频函数的离散采样值相乘,以得到所希望的 $g(x)$ 的采样。关于插值的具体方法可参考文献[12]。

第 2 步,将 $g(x)$ 与一调频函数作卷积。由于 $g(x)$ 是带限信号,所以线性调频函数也可以用其带限形式代替而不会有任何影响,即使我们可以取

$$g'(x) = A_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\pi\beta(x-x')^2] g(x') dx' = A_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(x-x') g(x) dx' \quad (6)$$

式中

$$h(x) = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} H(v) \exp[j2\pi vx] dv \quad (7)$$

这里

$$H(v) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{j\pi v^4} \exp(-j\pi v^2/\beta) \quad (8)$$

是函数 $e^{j\pi v^2}$ 的 Fourier 变换。于是,式(3)的离散形式为

$$g'(\frac{m}{2\Delta x}) = \sum_{n=-N}^N h(\frac{m-n}{2\Delta x}) g(\frac{n}{2\Delta x}) \quad (9)$$

这一离散卷积可以用快速 Fourier 变换计算。

第 3 步,计算式(2)得到 $f(x)$ 的分数阶 Fourier 变换 $f_p(x)$ 的采样值 $f_p(\frac{m}{2\Delta x})$ 。由于假定 $f(x)$ 的所有变换都是带限的,它们位于区间 $[-\Delta x/\Delta x/2]$,所以需要因子 2 对 $f_p(\frac{m}{2\Delta x})$ 进行二抽一采样,以得到离散采样 $f_p(\frac{m}{\Delta x})$ 。

归纳起来,上述方法从唯一描述连续信号 $f(x)$ 的

N 个离散采样 $f(\frac{m}{\Delta x})$ 开始, 最后得到唯一描述的 N 个离散采样 $f_p(\frac{m}{\Delta x})$ 。

如果令

$$f = [f(1/\Delta x), \dots, f(N/\Delta x)]^T$$

$$f_p = [f_p(1/\Delta x), \dots, f_p(N/\Delta x)]^T$$

则整个过程可以写作

$$f_p = F_1^p f, \quad F_1^p = D A H_p A J$$

式中, D 和 J 分别是对应内插和抽取运算的矩阵, 矩阵 A 为对角矩阵, 它对应为线性调频函数乘法, 而矩阵 H_p 对应卷积运算。注意, F_1^p 使得我们可以用原函数的离散采样得到其分数阶 Fourier 变换的离散采样, 这是对离散 Fourier 变换矩阵的基本要求。

上述方法只适用于 $-1 \leq p \leq 1$ 。如果 p 位于该区间以外, 则可以用分数阶域的旋转相加性得到所需要的分数阶 Fourier 变换。

4 分数阶傅里叶变换的应用

用上述方法可方便地得到函数 $f(x)$ 的分数阶傅里叶变换, 作为本文的一个例子, 考虑被线性调频信号 $e^{i\pi x^2}$ 污染混叠的高斯信号 $e^{-\pi(x-4)^2}$ 的滤波分离。

如图 2 所示, 图 2(a) 画的是混叠总信号的幅值。很明显, 在传统的时域和频域都不可能通过简单的一维遮隔将干扰分离出来。下面利用分数阶傅里叶变换来分 3 步进行滤波分离。

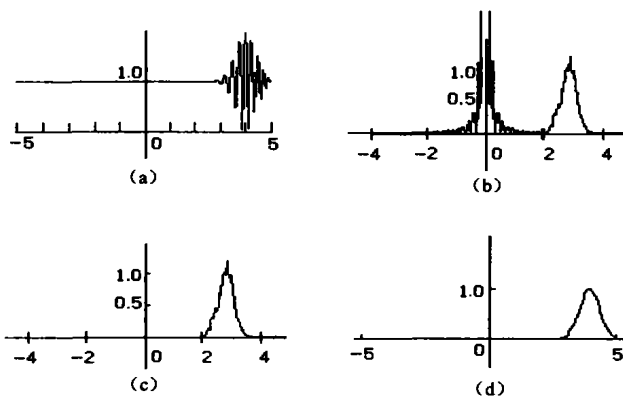


图 2 利用分数阶傅里叶变换滤波、恢复信号

首先利用高斯信号在任何 p 域均为高斯信号, 而线性调频信号在一定的 p 域会呈现谱的高度聚集这一事实, 以合适的旋转角 $p=0.5$ 对该混叠信号作分数阶 Fourier 变换, 可在 p 域将两者明显分开, 图 2(b) 画的是该 p 域谱的幅值。

然后, 如图 2(c) 那样进行遮隔, 即可除去混叠的线性调频信号的分数阶 Fourier 变换, 而只保留高斯信

号的分数阶 Fourier 变换。

最后一步, 利用分数阶 Fourier 反变换 (旋转角度为 $-p$) 将它变换回原来的时间域, 就可恢复出原来的高斯信号, 参见图 2(d)。

5 结 论

分数阶 Fourier 变换作为一种崭新的分析工具, 在工程上的提出还只是近几年的事。分数阶 Fourier 变换的应用研究也才只是刚刚开始, 其潜在的应用前景是十分广阔的。对分数阶 Fourier 变换的离散化和快速算法的研究是一个急需解决的问题, 利用文中提到的数值计算方法, 能较准确地从原始数据的样本出发, 最终得到其分数阶 Fourier 变换的样本值, 是实现分数阶 Fourier 变换的一种快速、有效的方法。分数阶域的滤波为传统的时域、频域滤波提供了新的思路。

参考文献:

- [1] NAMIAS V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics [J]. Inst Math Its, 1980, 25: 241 - 265.
- [2] 孙晓兵, 保铮. 分数阶 Fourier 变换及其应用 [J]. 电子学报, 1996, 24(12): 60 - 65.
- [3] RAYMER M G, BECK M. Complex wave-field reconstruction using phase-space tomography. [J]. Phys Rev LETT, 1994, 72: 1 137 - 1 140.
- [4] MENDLOVIC D, OZAKLASH M. Fractional Fourier transform and their implementation: I [J]. Opt Soc Amer A, 1993, 10: 1 875 - 1 881.
- [5] BERNARDO L M, SOATESO D D. Fractional Fourier transforms and optical systems [J]. Opt Commun, 1994, 110: 517 - 522.
- [6] BERNARDO L M, SOATESO D D. Fractional Fourier transforms and imaging. [J]. Opt Soc Amer A, 1994, 11: 2 622 - 2 626.
- [7] LOHMANN A W. Image rotation Wigner rotation and the fractional Fourier transform [J]. Opt Soc Amer A, 1993, 10: 2 188 - 2 186.
- [8] OZAKTAS H M, AYTUR O. fractional Fourier domains [J]. Signal Processing, 1995, 46: 119 - 124.
- [9] OZAKTAS H M, BARSHAN B. Convolution, filtering, and multiplexing in Fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms [J]. Opt Soc Amer A, 1994, 11: 547 - 559.
- [10] LEE S Y, SZU H H. Fractional Fourier transforms, wavelet transforms, and adaptive neural networks [J]. Opt Eng, 1994, 33: 2 326 - 2 330.
- [11] FONOLLOSA J R, NIKIAS C L. A new positive time -

frequency distribution [J]. Proc IEEE ICASSP - 94, 1994, 4:301 - 304.

fractional Fourier transform [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44:2 141 - 2 150.

[12] OZAKTAS H M, ARIKAN O. Digital computation of the

A Numerical Algorithms of Fractional Fourier Transform

CHEN Ming-jie

(College of Computer and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Signal and its Fourier transform can reflect the info of time-domain and frequency-domain independently. As a usually math tool, Fourier transform is using in math, physical and engineering field widely. A new tool for signal analysis, which is named Fractional Fourier transform (FRFT), is introduced. It is interpreted in view of the classic Fourier transform. It is important to study the numerical algorithms of FRFT, because usually the FRFT can not be given to an analytical expression. A numerical algorithm of FRFT is given. It is possible to separate the distortion from the simple Gaussian signal on which a chirp distortion has been superimposed by using fractional transform.

Key words: Fractional Fourier transform; Fourier transform; filter; disturb

(责任编辑 李胜春)

~~~~~  
(上接第 124 页)

## Content-aware Load Balancing Strategy in Web Cluster System

*LI Shuang-qing, YOU Lian, CHENG Dai-jie*

(College of Computer, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** The capacity problem of web server can be solved by web cluster technology. The key point is load balancing strategy and algorithm. Traditional strategies are effective to some kinds of web sites, but not suitable for all. The paper analyses the load characters of different kind of web sites. A content-aware web cluster load balancing strategy and algorithm is proposed. The efficiency will be evaluated through emulation experiments.

**Key words:** load balancing; web cluster; load balancing algorithm

(责任编辑 吕赛英)