文章编号:1000 - 582X(2003)06 - 0119 - 02

框架下的不规则采样定理*

张必山[1], 毛一波[2]
(1. 达县师范高等专科学校 数学系, 四川 达州 635000; 2. 渝西学院 数学系, 重庆 永川 402168)

摘 要:从空间 V_0 的框架出发,找出该空间的尺度函数,把框架转化成 Riesz 基,从而做框架下的不规则采样定理就转化为在 Riesz 基下做不规则的采样定理,或者说 Riesz 基下的不规则采样定理在一定的条件下可推广到框架下去。该定理可用于数字信号处理领域。

关键词:对偶; 框架; Riesz 基; 不规则采样
中图分类号:O174.2 **文献标识码**:A

随着科学的发展,人们对采样提出了更高的要求。目前广泛用于数字信号领域的采样是以 Shannon 采样定理[1]为基础的规则采样,即均匀采样 ,譬如在图像处理方面,对于一个平滑信号,只取少量的几个点就行了,而对于突变信号则需要采集更密集的点。目前王桥[2-3]在 V_0 的 Riesz 基下作出了不规则采样定理,这对信号处理产生了巨大的推动力。笔者通过框架和 Riesz 基的关系对王桥作的采样定理作进一步的推广,即从一个空间的框架出发构筑采样定理。推广的关键在于根据框架构造出了正交基。当然,正交基肯定也是这个空间的 Riesz 基,从而把王桥的不规则采样推广到框架之下,这对数字信号处理技术的发展将产生巨大的推动作用。

1 预备知识

首先介绍一下与采样定理相关的知识。

定义 1[2] 称 $f(x) \in V_0$ 是可平移的,如果 $\forall s \in R$ 有 $f(x-s) \in V_0$。称 V_0 是可平移的,如果 V_0 中任意函数都是可平移的。

定义 2 设 $V_0 \in L^2(R)$ 是由某生成子 $\varphi(x)$($\|\varphi(x)\|_2 = 1$)生成,是指 $\{\phi(x-k)\}_{k\in Z}$ 是 V_0 的正交基。

定义 3 设 $\{\varphi_i\}_{i\in z}$ 是 V_0 的一个框架, 是指存在 $0 < A \leqslant B < \infty$,使得 $\forall f \in H$ 都有

$$A\|f\|_2^2 \leqslant \sum_{i\in Z} |\langle f,\varphi_i\rangle|^2 \leqslant B\|f\|_2^2$$

其中 $V_0 \subset L^2(R)$, $\varphi_i = \varphi(x-i)$, $(i \in Z)$,称 A, B 为框架界。

定理 1 设 V_0 是可平移的, $\{\varphi_i\}_{i\in z}$ 是它的框架, $\{\tilde{\varphi}_i\}$ 是它的对偶框架,则 $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}(x-i)$。

证明 根据文献[1], 有 $\tilde{\varphi}_i = (F^*F)^{-1}\varphi_i$
又因为 $\varphi_i = \varphi(x-i)$,

$$\tilde{\varphi}_i = (F^*F)^{-1}\varphi(x-i), (F^*,F)^{-1}\varphi = \tilde{\varphi}$$

$$\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}(x-i)$$

根据文献[1],可知

$$f(x) = \sum_{i\in z}\langle f,\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_i = \sum_{i\in z}\langle f,\tilde{\varphi}_i\rangle\varphi_i,$$

令 $k(x,y) = \sum_{i\in z}\tilde{\varphi}(x-i)\varphi(y-i)$

定义算子 K: $V_0 \to V_0$

$$Kg(t) = \int g(s)k(s,t)\mathrm{d}s$$

则算子 K 是连续的。

定理 2 设 V_0 为定义 2 所决定,定义如上的算子 K,则空间 V_0 的生成子被算子 K 所决定。

证明 设 $\Phi_k(t)$ 是算子 K 的属于非零 λ_k 的特征函数,即 $K\Phi_k(t) = \lambda_k\Phi_k(t)$。由于 V_0 是可分的 Hilbert 空间,故 $\{\Phi_k(t)\}$ 必能扩充成 V_0 的正交基,又由于 V_0 是某生成子 Ψ 生成的,因此 $\Phi_k(t) = \Psi(t-k)$,从而 Ψ 被算子 K 所决定。

2 不规则采样定理

不规则采样的信号重建(其特例是规则的情形)有很大的应用价值。对经典的带限情况,已有了比较完备的结论[4-13]。若采样速率是均匀的,则文献[1] 已给

* 收稿日期:2003 - 01 - 08
基金项目:教育部"留学回国人员科研启动基金"资助项目(教外司留[2002]247 号);重庆大学"骨干教师资助计划"资助项目
作者简介:张必山(1969 -),男,四川大竹人,重庆大学硕士研究生,主要从事小波分析研究。

出了回答。对于非均匀采样的信号重构,其主要目的就是建立插值公式:

$$f(x)=\sum f(\lambda_n)S_n(x)$$

但此时问题比均匀采样要复杂些,其实质性在于以下两个发散级数问题:

1) $\sum|f(\lambda_n)|^2$ 不一定反映信号能量,故可能发散;

2) $S_n(x)$ 互相不再是简单的平移关系,即 $S_n(x)\neq S_0(x-n)$,故 $\|S_n(x)\|$ 未必上(下)一致有界,即使 $\{f(\lambda_n)\}_{n\in Z}\in l^2$,上式也未必在 l^2 中收敛。作为一个变通,对该式采用一个加权技巧,变成

$$f(x)=\sum_{n\in Z}\frac{f(\lambda_n)}{\mu_n}\mu_nS_n(x)$$

再予以处理,只要以下两条满足即可

1) $\sum_{n\in Z}\left|\frac{f(\lambda_n)}{\mu_n}\right|^2<\infty$;

2) $\{\mu_nS_n(x)\}_{n\in Z}$ 是 Riesz 基。

这是解决本问题的思路。现在给出具体讨论,易见 V_0 的再生核为

$$\tilde{K}(x,y)=\sum_n\varphi(x-n)\varphi(y-n)$$

定义 $\varphi_{mn}=\varphi(\lambda_m-n)$,$\mu_m=(\sum_{n\in Z}|\varphi_{mn}|^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$l_{mn}=\frac{\tilde{K}(\lambda_m,\lambda_n)}{\mu_m\mu_n}$$

并记矩阵 $\boldsymbol{\Phi}=(\varphi_{mn})$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}=(\varphi_{mn}^{-1})$,即有,$\sum_{j\in Z}\varphi_{nj}\varphi_{jm}^{-1}=\delta_{nm}$,$(n,m\in Z)$。

由定理1和定理2,可以从框架 $\{\Psi_i\}$ 出发,定义算子 K,决定出 V_0 的生成子 φ,从而得到定理3。

定理3 设 $\{\Psi_i\}$ 是 V_0 的框架,由算子 K 决定出 V_0 的生成子为 φ,则当 $\boldsymbol{l}=(l_{mn})$ 与 $\boldsymbol{\Phi}=(\varphi_{mn})$ 都是 l^2 上的有界可逆线性算子时,下述结论成立:

1) $\left\{\frac{\tilde{K}(x,\lambda_n)}{\mu_n}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 V_0 空间的 Riesz 基,其双正交基为 $\{\mu_nS_n(x)\}_{n\in Z}$,其中

$$S_n(x)=\sum_{j\in Z}\varphi_{jn}^{-1}\varphi(x-j)$$

2) 对任意序列 $\{c_n\}_{n\in Z}$,当 $\left\{\frac{c_n}{\mu_n}\right\}_{n\in Z}\in l^2$ 时,插值问题 $f(\lambda_n)=c_n$ 在 V_0 中有且仅有唯一解

$$f(x)=\sum_{n\in Z}f(\lambda_n)S_n(x)$$

证明 i) 完全按文献[3]中定理1类似证明去做。即知 $\left\{\frac{\tilde{K}(x,\lambda_n)}{\mu_n}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 Riesz 基,双正交性按下式来验证:

$$\langle\mu_mS_m(x),\frac{K(x,\lambda_n)}{\mu_n}\rangle=\frac{\mu_m}{\mu_n}\langle s_m(x),\tilde{K}(x,\lambda_n)\rangle=$$

$$\frac{\mu_m}{\mu_n}\langle\sum_{j\in Z}\varphi_{jm}^{-1}\varphi(x-j),\sum_{k\in Z}\varphi(x-k)\varphi(\lambda_n-k)\rangle=$$

$$\frac{\mu_m}{\mu_n}\sum_{j\in Z}\varphi_{jm}^{-1}\sum_{k\in Z}\langle\varphi(x-j),\varphi(x-k)\rangle\varphi(\lambda_n-k))\rangle=$$

$$\frac{\mu_m}{\mu_n}\sum_{j\in Z}\varphi_{jm}^{-1}\varphi(\lambda_n-j)=\frac{\mu_m}{\mu_n}S_m(\lambda_n)=$$

$$\frac{\mu_m}{\mu_n}\sum_{j\in Z}\varphi_{jm}^{-1}\varphi_{nj}=\frac{\mu_m}{\mu_n}\delta_{mn}=\delta_{mn}$$

ii) 上面已得到 $S_m(\lambda_n)=\delta_{mn}$,这保证了 $f(\lambda_m)=\sum_{n\in Z}f(\lambda_n)S_n(\lambda_m)=\sum_{n\in Z}f(\lambda_n)\delta_{mn}$ 成立,当然 $f(x)\in V_0$。

对于唯一性,只须考虑 $g(x)\in V_0$,$g(\lambda_n)=0(\forall n\in Z)$,证明 $g(x)\equiv0$。事实上 $g(x)\in V_0\Rightarrow g(x)=\sum_n c_n\varphi(x-n)$,$(c_n)\in l^2$

于是 $\sum_{n\in Z}c_n\varphi_{mn}=0$,但 $\boldsymbol{\Phi}=(\varphi_{mn})$ 是 l^2 上有界可逆线性算子,故 $c_n\equiv0(\forall n\in z)$,可见,$g(x)\equiv0$,从而唯一性获证。

参考文献:

[1] DAUCHEIES I. Ten Lectures on Wavelets[M]. Philadelphia: SIAM, 1992.

[2] 王桥. 可分辨信号空间理论 II 信号重构[J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1997, 43(1): 18-19.

[3] 王桥. 可分辨信号空间理论 I 采样定理[J]. 武汉大学学报(自然科学版) 1996, 42 (1): 8-9.

[4] MEYER Y. Ondelettes et Operaterurs[M]. Paris: Hermonn, 1990.

[5] FOLLAND G B. Harmonic Analysis in Phase Space[M]. New jersey: Princeton Univ Press, 1989.

[6] 李衍达,常迥. 信号重构理论及其应用[M]. 北京:清华大学出版社, 1991.

[7] SIMONCELLI E P. Shiftable Multiscale Transforms[J]. IEEE Trans on Inform Theory, 1992, 38: 881-884.

[8] DAUBECHIES I. The Wavelet Transforms, Time - frequency Localization and Signal Analysis[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1990, 36: 961-1 005.

[9] MEYER Y. Wavelets: Algorithms and Application[M]. Philadelphia: SIAM, 1993.

[10] FEFFERMAN C L. The Uncertainty Principle[J]. Bull AMS, 1983, 9(2): 129-206.

[11] WIGNER E. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrum[J]. Phys Rev, 1982, 40: 749-759.

[12] GABOR D. Theory of Communications[J]. Inst Elec Eng, 1946, 93(2): 429-457.

[13] WANG Q. A Simple Model of Aharonov - Berry's superoslillations[J]. Phys Math, 1996, 29: 2 257-2 258.

(下转第 132 页)

Iterative Approximation with Errors for Solutions to Variational Inclusions With Strongly Accretive Type Mapping

JIN Mao-ming

(Department of Mathematics, Fuling Teachers College, Chongqing 408003, China)

Abstract: We established the generic principle in Banach spaces about unique existence of solutions and approximation of Ishikawa iterative procedures with errors for a class of variational inclusions with strongly accretive type mappings. It is also pointed out that this problem, widely researched approximation of Ishikawa iterative procedures for variational inclusions with strongly accretive type mappings, is only an especied example of Ishikawa iterative procedures with errors. The results are the popularization and deuelopment of the recent corresponding results.

Key words: variational inclusion; strongly accretive mapping; Ishikawa process with errors

(编辑 张 苹)

(上接第 120 页)

Irregular Sampling Theorem on the Frame

ZHANG Bi-shan[1], *MAO Yi-Bo*[2]

(1. Department of Mathematics, Normal College of Daxian, Dazhou, Sichuan 63500, China;

2. Department of Mathematics, Yuxi College, Chongqing 402168, China)

Abstract: From the space V_0, the scaling function of it is found. It is possible to transform the frame of V_0 into Riesz base of it (of course, the orthogonal bases are also Riesz bases), so that the irregular sampling theorem on the frame is changed into the one on the Riesz bases, in other words, the irregular sampling theorem on the Riesz bases is extend onto the frame. The irregular theorem on the frame can be used to the signal process.

Key words: dual; frame; riesz bases; irregular sample

(编辑 张 苹)