文章编号:1000 - 582X(2003)06 - 0129 - 04

强增生型变分包含解的具误差的迭代逼近*

金 茂 明
(涪陵师范学院 数学系,重庆 涪陵 408003)

摘 要:建立了 Banach 空间中一类强增生型变分包含解的存在唯一性及其具误差的 Mann 和 Ishikawa 迭代程序逼近的一般性原理,指出已被广泛研究的强增生型变分包含解的 Mann 和 Ishikawa 迭代程序逼近问题仅是具误差的 Ishikawa 迭代程序的特例,其结果是近期相关结果的推广和发展。

关键词:变分包含; 强增生映象; 具误差的 Ishikawa 迭代
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A

设 X 是一实 Banach 空间,X^* 是其对偶空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表 X 与 X^* 间的配对,$D(T)$ 和 $R(T)$ 分别表示 T 的定义域和值域。

设 $T,A: X\to X$, $g: X\to X^*$ 是三个映象,$\varphi: X^*\to R\cup\{+\infty\}$ 是一真凸下半连续函数。

1999 年,张石生教授[1] 引入了 Banach 空间中的变分包含问题:对任给的 $f\in X$, 求 $u\in X$ 使得

$$\begin{cases} g(u)\in D(\partial\varphi) \\ \langle Tu-Au-f, v-g(u)\rangle \geqslant \\ \varphi(g(u))-\varphi(v), \forall v\in X^* \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\partial\varphi$ 表 φ 的次微分,并在 Banach 空间中,给出了增生型变分包含式(1)的解的存在唯一性及其 Mann 和 Ishikawa 迭代过程的收敛性定理。其结果改进和推广了文献[2 - 5]的相关结果。由于迭代过程有时是非精确的,故在迭代过程中存在误差,因而研究带有误差项的迭代法的收敛问题无疑是一件十分有意义的工作。本文目的是在 Banach 空间中研究增生型变分包含式(1)的解的存在唯一性及其 Xu[6] 定义的具误差的 Ishikawa 迭代过程的收敛问题,其结果是文献[1]的改进和推广。

1 预备知识

设 X 是一实 Banach 空间,称 X 是一致光滑的,若其光滑模 $\rho X(\tau)$:

$$\rho X(\tau) = \sup\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1: x,y\in X, \|x\| = 1, \|y\|\leqslant\tau\}, \tau>0$$

满足条件:$\rho(\tau)/\tau\to 0(\tau\to 0)$。映象 $J: X\to 2^{X^*}$ 称为正规对偶映象,如果

$$J(x) = \{f\in X^*: \langle x,f\rangle = \|x\|\cdot\|f\|, \|f\| = \|x\|\}, \forall x\in X$$

命题 1[7] 设 X 是实 Banach 空间,则

1) X 是光滑的 $\Leftrightarrow$ J 是单值的 $\Leftrightarrow$ J 是强 - 弱* 连续的;

2) X 是一致光滑的,则 X 是光滑的自反 Banach 空间,而且 J 是单值的并在 X 的任一有界集上是一致连续的。

定义 1 映象 $T: D(T)\subset X\to X$ 称为增生的,如果对任意 $x,y\in D(T)$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 使得

$$\langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle\geqslant 0$$

定义 2 映象 $T: D(T)\subset X\to X$ 称为强增生的,如果存在常数 $k\in(0,1)$ 使得 $\forall x,y\in D(T)$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 满足

$$\langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2$$

式中的 k 称为 T 的强增生常数。

命题 2[1] 设 X 是实的 Banach 空间,如果 $T: X\to X$ 是强增生映象,$S: X\to X$ 是增生映象,则 $T+S: X\to X$ 也是一具有强增生常数 k 的强增生映象。

* 收稿日期:2003 - 01 - 09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19871067);重庆市教委科技基金资助项目(021301)
作者简介:金茂明(1963 -),男,重庆涪陵人,涪陵师范学院副教授,主要从事非线性泛函分析研究。

引理 1[8] 设 X 是一实 Banach 空间,则对任意的 $x,y\in X$,下列不等式成立:

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\quad j(x+y)\in J(x+y)$$

引理 2[9] 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是非负实数列且满足条件

$$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_n,\forall n\geqslant 0$$

如果 $t_n\in[0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$, $b_n=o(t_n)$,则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

引理 3[1] 设 X 是一实的自反 Banach 空间,则下列结论等价:

i) $x^*\in X$ 是变分包含式(1)的解;

ii) $x^*\in X$ 是映象 $S: X\to 2^X$ 的不动点,其中

$$S(x)=f-(Tx-Ax+\partial\varphi(g(x)))+x$$

iii) x^* 是方程 $f\in Tx-Ax+\partial\varphi(g(x))$ 的解。

2 主要结果

定理 1 设 X 为一致光滑的 Banach 空间,$T,A: X\to X$,$g: X\to X^*$ 是三个连续的映象,而 $\varphi: X^*\to R\cup\{+\infty\}$ 是具连续 Gâteaux 微分 $\partial\varphi$ 的泛函,且满足下面的条件:

i) $T-A: X\to X$ 是具强增生常数 $k\in(0,1)$ 的强增生映象;

ii) $\partial\varphi\circ g: X\to X$ 是增生映象;

设 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 X 中的有界序列,$\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\bar{\alpha}_n\}$, $\{\bar{\beta}_n\}$, $\{\bar{\gamma}_n\}$ 是[0,1]中满足下列条件的实数列:

iii) $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=\bar{\alpha}_n+\bar{\beta}_n+\bar{\gamma}_n=1,\forall n\geqslant 0$;

iv) $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\bar{\beta}_n=\lim_{n\to\infty}\bar{\gamma}_n=0$;

v) $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=\infty$;

vi) $\gamma_n=o(\beta_n)$

对任给的 $f\in X$,定义映象 $S: X\to X$ 如下:

$$Sx=f-(Tx-Ax+\partial(g(x)))+x$$

如果对任给的 $x_0\in X$,由下式定义具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=\alpha_nx_n+\beta_nSy_n+\gamma_nu_n \tag{2}$$

$$y_n=\bar{\alpha}_nx_n+\bar{\beta}_nSx_n+\bar{\gamma}_nv_n,\forall n\geqslant 0 \tag{3}$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于变分包含式(1)的唯一解的充要条件是序列 $\{Sx_n\}$ 和 $\{Sy_n\}$ 都有界。

证明 由条件 i) 和 ii) 及命题 2,映象 $T-A+\partial\varphi\circ g: X\to X$ 是连续的强增生映象,于是由 Morales 知 $T-A+\partial\varphi\circ g$ 是满射的。故对任意的 $f\in X$,方程

$$f=(T-A+\partial\varphi\circ g)(x)$$

在 X 中有解 x^*;再由 $T-A+\partial\varphi\circ g$ 的强增生性,即知 x^* 是此方程的唯一解。由于 X 是一致光滑的,故由命题 1 知 X 是自反的,从而由引理 3 得这一 x^* 是变分包含式(1)的唯一解,因而 x^* 也是 S 在 X 中的唯一不动点,即 $x^*=Sx^*$。

现证,$\|x_n-x^*\|\to 0(n\to\infty)$ 当且仅当序列 $\{Sx_n\}$ 和 $\{Sy_n\}$ 都有界。

设 $\{x_n\}$ 强收敛于变分包含(1)的唯一解 x^*,则由 $T-A+\partial\varphi\circ g: X\to X$ 的连续性,得知映象 $S: X\to X$ 也是连续的,因此,$Sx_n\to Sx^*$。由式(3)和条件 iii), iv)有

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(\bar{\alpha}_nx_n+\bar{\beta}_nSx_n+\bar{\gamma}_nv_n)=x^*$$

故 $Sy_n\to Sx^*$,因而 $\{Sx_n\}$ 和 $\{Sy_n\}$ 都是有界的。

反之,若序列 $\{Sx_n\}$ 和 Sy_n 都有界,则令

$$M=\sup\{\|Sx_n-x^*\|: n\geqslant 0\}+\sup\{\|Sy_n-x^*\|\}: n\geqslant 0\}+\|x_0-x^*\|+\sup\{\|u_n-x^*\|: n\geqslant 0\}+\sup\{\|v_n-x^*\|: n\geqslant 0\} \tag{4}$$

下证,对 $\forall_n\geqslant 0$,有

$$\|x_n-x^*\|\leqslant M,\|y_n-x^*\|\leqslant M \tag{5}$$

事实上,当 $n=0$ 时,由式(4)知 $\|x_0-x^*\|\leqslant M$,现设 $\|x_n-x^*\|\leqslant M$ 对 $n=k$ 成立,于是当 $n=k+1$ 时,有

$$\|x_{k+1}-x^*\|\leqslant\alpha_k\|x_k-x^*\|+\beta_k\|Sy_k-x^*\|+\gamma_k\|u_k-x^*\|\leqslant(\alpha_k+\beta_k+\gamma_k)M=M$$

而 $\|y_n-x^*\|\leqslant\bar{\alpha}_n\|x_n-x^*\|+\bar{\beta}_n\|Sx_n-x^*\|+\bar{\gamma}_n\|v_n-x^*\|\leqslant(\bar{\alpha}_n+\bar{\beta}_n+\bar{\gamma}_n)M=M$

由式(2)及引理 1,得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x^*\|^2=\|\alpha_n(x_n-x^*)+\beta_n(Sy_n-x^*)+\gamma_n(u_n-x^*)\|^2\leqslant\alpha_n^2\|x_n-x^*\|^2+2\beta_n\langle Sy_n-x^*,\\&j(x_{n+1}-x^*)\rangle+2\gamma_n\langle u_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant\\&(1-\beta_n-\gamma_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\beta_n\langle Sy_n-x^*,\\&j(y_n-x^*)\rangle+2\beta_n\langle Sy_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*)-\\&j(y_n-x^*)\rangle+2\gamma_n\|u_n-x^*\|\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\\&(1-\beta_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\beta_n\langle Sy_n-x^*,\\&j(y_n-x^*)\rangle+2\beta_n\langle Sy_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*)-\\&j(y_n-x^*)\rangle+2M^2\gamma_n\end{aligned} \tag{6}$$

考察式(6)右端第 2 项

$$\langle Sy_n-x^*,j(y_n-x^*)\rangle=\langle Sy_n-Sx^*,$$

$$j(y_n-x^*)\rangle=\langle f-(T-A+\partial\varphi\circ g)(y_n)+y_n-$$

$$(f - (T - A + \partial\varphi \circ g)(x^*) + x^*), j(y_n - x^*)\rangle = \| y_n - x^* \|^2 - \langle (T - A + \partial\varphi \circ g)(y_n) - (T - A + \partial\varphi \circ g)(x^*), j(y_n - x^*)\rangle \leqslant (1 - k) \| y_n - x^* \|^2 \quad (7)$$

另由式(3)、(5) 及引理 1，有

$$\| y_n - x^* \|^2 = \| \bar{\alpha}_n (x_n - x^*) + \bar{\beta}_n (Sx_n - x^*) + \bar{\gamma}_n (v_n - x^*) \|^2 \leqslant \bar{\alpha}_n^2 \| x_n - x^* \|^2 + 2\bar{\beta}_n \langle Sx_n - x^*, j(y_n - x^*)\rangle + 2\bar{\gamma}_n \langle v_n - x^*, j(y_n - x^*)\rangle \leqslant \| x_n - x^* \|^2 + 2M^2(\bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n)$$

把上式代入式(7) 得

$$\langle Sy_n - x^*, j(y_n - x^*)\rangle \leqslant (1 - k) \| x_n - x^* \|^2 + 2M^2(1 - k)(\bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n) \quad (8)$$

从而由式(6) 和式(8) 得

$$\| x_{n+1} - x^* \|^2 \leqslant (1 - \beta_n)^2 \| x_n - x^* \|^2 + 2\beta_n(1 - k) \| x_n - x^* \|^2 + 4M^2(1 - k)\beta_n(\bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n) + 2\beta_n e_n + 2M^2\gamma_n \leqslant (1 - k\beta_n) \| x_n - x^* \|^2 + \beta_n^2 M^2 + 4M^2(1 - k)\beta_n(\bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n) + 2\beta_n e_n + 2M^2\gamma_n \quad (9)$$

其中，$e_n = \langle Sy_n - x^*, j(x_{n+1} - x^*) - j(y_n - x^*)\rangle$。注意到当 $n \to \infty$ 时

$$\| (x_{n+1} - x^*) - (y_n - x^*) \| = \| x_{n+1} - y_n \| = \| (\bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n - \beta_n - \gamma_n) x_n + \beta_n Sy_n - \bar{\beta}_n Sx_n + \gamma_n u_n - \bar{\gamma}_n v_n \| \leqslant | \bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n - \beta_n - \gamma_n | \, \| x_n \| + \beta_n \| Sy_n \| + \bar{\beta}_n \| Sx_n \| + \gamma_n \| u_n \| + \bar{\gamma}_n \| v_n \| \to 0 (n \to \infty)$$

因为 X 是一致光滑 Banach 空间，所以 J 在 X 的任何有界集上是一致连续的，于是有

$$\| j(x_{n+1} - x^*) - j(y_n - x^*) \| \to 0 (n \to \infty)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$。

又因为 $\gamma_n = o(\beta_n)$，所以存在非负数列 $\{\varepsilon_n\}$ 使 $\gamma_n = \beta_n \varepsilon_n$ 且 $\varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)$。令 $\lambda_n = M^2\beta_n + 4M^2(1 - k) \cdot (\bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n) + 2e_n + 2\varepsilon_n M^2$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$。

由式(9) 知

$$\| x_{n+1} - x^* \|^2 \leqslant (1 - k\beta_n) \| x_n - x^* \|^2 + \lambda_n \beta_n \quad (10)$$

在式(10) 中取 $a_n = \| x_n - x^* \|^2, t_n = k\beta_n, b_n = \lambda_n \beta_n$，则式(10) 变为 $a_{n+1} \leqslant (1 - t_n) a_n + b_n$。由条件 iv) 和 v) 易知 $t_n \in [0,1]$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$，$b_n = o(\beta_n)$，由引理 1 得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，即 $\{x_n\}$ 强收敛到 x^*。

定理 1 的证明完成。

在定理 1 中，如果对 $\forall n \geqslant 0, \bar{\beta}_n = \bar{\gamma}_n = 0$，则 $y_n = x_n$，$\forall n \geqslant 0$，$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n Sx_n + \gamma_n u_n, n \geqslant 0$。于是，得到下面的结果。

定理 2　设 X, T, A, φ, S, g 及 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ 满足定理 1 中条件，如果对 $\forall x_0 \in X$，由下式定义具误差的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$：

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n Sx_n + \gamma_n u_n, n \geqslant 0$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于变分包含式(1) 的唯一解的充要条件是序列 $\{Sx_n\}$ 有界。

注　定理 1 将文献[1]中的定理 2.1 从 Ishikawa 迭代推广到具误差的 Ishikawa 迭代；定理 2 将文献[1]中的定理 2.2 从 Mann 迭代推广到具误差的 Mann 迭代；笔者的结果改进和推广了文献[2 - 5]的相关结果。

参考文献：

[1] 张石生. Banach 空间中增生型变分包含解的 Mann 和 Ishikawa 迭代逼近[J]. 应用数学与力学, 1999, 20(6): 551 - 558.

[2] DING X P. Perturbed proximal point algorithms for generalized quasivariational inclusions [J]. J Math Anal Appl, 1997, 210(1): 88 - 101.

[3] DING X P. Generalized strongly nonlinear quasi - variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1993, 173(2): 557 - 587.

[4] HASSOUNI A, MOUDAFI A. A perturbed algorithm for variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1994, 185(3): 706 - 721.

[5] ZENG L C. Iterative algorithms for finding approximate solutions for general strongly nonlinear variational inequalities [J]. J Math Anal Appl, 1994, 187(2): 352 - 360.

[6] XU Y U. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive operator eqations[J]. J Math Anal Appl, 1998, 224(1): 91 - 101.

[7] 游兆永, 龚怀云, 徐宗本. 非线性分析[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.

[8] CHANG S S. On Chidume's open questions and approximate solutions for multi - valued strongly accretive mapping equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216(1): 94 - 111.

[9] WENG X L. Fixed point iteration for local strictly pseudo - contractiive mapping[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 113: 727 - 731.

Iterative Approximation with Errors for Solutions to Variational Inclusions With Strongly Accretive Type Mapping

JIN Mao-ming

(Department of Mathematics, Fuling Teachers College, Chongqing 408003, China)

Abstract: We established the generic principle in Banach spaces about unique existence of solutions and approximation of Ishikawa iterative procedures with errors for a class of variational inclusions with strongly accretive type mappings. It is also pointed out that this problem, widely researched approximation of Ishikawa iterative procedures for variational inclusions with strongly accretive type mappings, is only an especied example of Ishikawa iterative procedures with errors. The results are the popularization and deuelopment of the recent corresponding results.

Key words: variational inclusion; strongly accretive mapping; Ishikawa process with errors

(编辑 张 苹)

(上接第 120 页)

Irregular Sampling Theorem on the Frame

ZHANG Bi-shan[1], *MAO Yi-Bo*[2]

(1. Department of Mathematics, Normal College of Daxian, Dazhou, Sichuan 63500, China;
2. Department of Mathematics, Yuxi College, Chongqing 402168, China)

Abstract: From the space V_0, the scaling function of it is found. It is possible to transform the frame of V_0 into Riesz base of it (of course, the orthogonal bases are also Riesz bases), so that the irregular sampling theorem on the frame is changed into the one on the Riesz bases, in other words, the irregular sampling theorem on the Riesz bases is extend onto the frame. The irregular theorem on the frame can be used to the signal process.

Key words: dual; frame; riesz bases; irregular sample

(编辑 张 苹)