文章编号:1000 - 582X(2004)10 - 0060 - 04

由自引力支配的负能谱系统的稳定性*

邓 昭 镜
(西南师范大学 物理系,重庆 北碚 400715)

摘 要:在正、负能谱热力学理论的基础上建立了正、负能谱系统稳定平衡判据间的互补对应,又根据 L. D. Landau 关于负能谱系统存在条件的论述,并结合广义相对论中经修改了的较精确的引力公式,论述了高密度自引力塌缩物质是负能谱系统存在的重要形式,最后根据负能谱系统稳定平衡判据论证了负能谱系统平衡态的稳定性。

关键词:熵减原理;自由能密度;稳定性判据
中图分类号:O414.1 **文献标识码**:A

1 正、负能谱系统在稳定性规律上的互补性

正能谱系统与负能谱系统在其所遵从的热力学规律上是互补的,例如在正能谱中孤立系统遵从熵增加原理,而在负能谱中孤立系统遵从熵减原理;在正能谱中平衡态的温度恒正,而在负能谱中平衡态的温度恒负;在正能谱中功可以无补偿地完全转化为热,热不能无补偿地完全转化为功,而在负能谱中,热可以无补偿地完全转化为功,但功不能无补偿地完全转化为热;在正能谱中第三定律表述为:不可能通过有限个可逆过程使系统的温度降至绝对零度,而在负能谱中第三定律表述为:不可能通过有限个可逆过程将系统的温度升至绝对零度;在正能谱中热力学基本等式是:

$$TdS = dU + pdV - \sum \mu_i dN_i, \qquad (1)$$

而在负能谱中热力学基本等式是:

$$\tilde{T}d\tilde{S} = d\tilde{U} + \tilde{P}d\tilde{V} - \sum \tilde{\mu}id\tilde{N}_i, \tilde{p} = -p, \tilde{\mu}_i = -\mu_i \qquad (2)$$

等等。总之,只要有无下界的负能谱系统存在,就可以像正能谱系统一样等价而平权地建立起与之互补的热力学理论[1]。Landau L. D 在文献[2]中详细地论证了负能谱存在的条件,笔者又在文献[3]中分析了高密度的白矮星是一个实际存在的负能谱系统。因此负能谱热力学的建立不仅有理论意义,而且更有实际价值,既然正、负能谱系统在基本规律上是彼此互补的,可以预期正、负能谱系统的稳定性判据也必然具有互补性,现在结合高密度自引力系统对这一问题进行具体探讨。

在正能谱中热力学理论的基石是熵的基本不等式,或 Clausius 不等式:

$$dS \geqslant \frac{Q}{T} \qquad (3)$$

Q 是系统吸入的热量,T 是热源的温度,对于孤立(或绝热)系统有

$$dS \geqslant 0 \qquad (4)$$

式(4)表明在正能谱中,孤立系统的熵恒增,或者说熵趋于极大,当 $dS = 0$ 时,系统达到平衡。

从式(3)出发易于证明系统的 Helmholtz 自由能 F 和 Gibbs 自由能 G 分别具有如下的稳定平衡判据。

1) 对 Helmholtz 自由能 F,有:

$$-dF \geqslant -W_e \quad (等温过程) \qquad (5)$$

W_e 是外界的功,式(5)表明正能谱中系统对外作功不大于系统自由能的减少,因此正能谱中系统自由的减少是系统在等温过程中所能付出的最大功。当 $W_e = 0$ 时,则有:

$$-dF \geqslant 0, \quad 即\ dF \leqslant 0 \qquad (6)$$

式(6)表明在正能谱中的系统其自由能 F 在等温过程中总趋于极小,当 $dF = 0$ 时,达到平衡。

2) 对 Gibbs 自由能 G,有:

$$-dG \geqslant -W' \quad (等温等压过程) \qquad (7)$$

$-W'$是系统对外作的非膨胀功,式(7)表明正能谱中的系统通过等温、等压过程所作的非膨胀功不大于系

* 收稿日期:2004 - 05 - 20
作者简介:邓照镜(1932 -),男,湖北宜昌人,西南师范大学教授,主要从事热力学与统计物理理论研究。

统 Gibbs 自由能的减少，系统 Gibbs 自由能的减少是系统在等温、等压过程中所能付出的最大的非膨胀功，当 $W'=0$ 时，有：

$$dG \leqslant 0 \tag{8}$$

因此正能谱中系统的 Gibbs 自由能在等温、等压过程中总趋于极小。当 $dG=0$ 时，达到平衡。

以上就是大家熟知的正能谱系统中的几个重要的稳定平衡判据，概括起来是：当 N_i 不变时，孤立系统的熵趋于极大；等温、等容过程中，系统对外作功为零时，系统的自由能趋于极小；在等温、等压过程中，系统的非膨胀功为零时，系统的 Gibbs 自由能趋于极小。大家知道，熵标示着系统中不可利用能（无序运动）所占的分额，而各种自由能（如 F、G 和 J 等）则标示着系统中可利用能所占的分额。在正能谱中的系统的熵趋于极大和各类自由能趋于极小，就标示着正能谱中的系统在各种条件中所进行的一切自发过程的最终结果是导致系统的不可利用能增加，可利用能减少，也即导致能量质的退降。

下面来具体讨论负能谱中系统的稳定平衡判据，首先仍从负能谱中熵的演化规律出发，在负能谱中由于能谱 ε_i 处于 $-\infty<\varepsilon_i\leqslant 0$ 之间，因此熵的基本不等式应表示为[1]：

$$d\tilde{S} \leqslant \frac{Q}{\tilde{T}} \qquad \tilde{T}\leqslant 0, Q\geqslant 0 \tag{9}$$

Q 是系统吸收的热，$\tilde{T}$ 是负温度（以下对负能谱中的热力学量皆注以（～）号）。对于绝热或孤立系统，有：

$$d\tilde{S} \leqslant 0 \tag{10}$$

式(10)表明：负能谱中孤立系统的熵永不增加，系统的熵总趋于极小，这就是负能谱中的熵减原理，它和正能谱中熵增原理一样在负能谱中起着基石的作用。

对 $\tilde{U}$ 作 Legendre 变换，引入自由能 $\tilde{F}=\tilde{U}-\tilde{T}\tilde{S}$。对于等温过程，有，$d\tilde{F}=d\tilde{U}-\tilde{T}d\tilde{S}$，应用式(9)则得

$$\frac{d\tilde{U}-d\tilde{F}}{\tilde{T}} = d\tilde{S} \leqslant \frac{Q}{\tilde{T}} = \frac{d\tilde{U}-\tilde{W}_e}{\tilde{T}} \tag{11}$$

进而可得：

$$-d\tilde{F} \leqslant -\tilde{W}_e \tag{12}$$

$\tilde{W}_e$ 是负能谱系统外界作的功，式(12)表明负能谱中的系统在等温过程中对外界作的功不小于自由能的减少，系统的自由能的减少是系统在等温过程中所作的最小功，当系统对外作功为零时，$-\tilde{W}_e=0$，则有：

$$-d\tilde{F} \leqslant 0, \text{即 } d\tilde{F} \geqslant 0 \tag{13}$$

式(13)表明，负能谱中的系统在等温过程中，其自由能永不减少，系统的自由能总趋于极大，当系统达到稳定平衡时，有 $d\tilde{F}=0$。

同样对 F 作 Legendre 变换，引入负能谱中的 Gibbs 自由能 $\tilde{G}$：$\tilde{G}=\tilde{F}-\tilde{P}\tilde{V}$。对等温、等压过程求 $\tilde{G}$ 的微分表示：

$$d\tilde{G} = d\tilde{F} - \tilde{P}dV = d\tilde{U} - \tilde{T}dS - \tilde{P}d\tilde{V},$$

应用式(9)，同样可以得到：

$$\frac{d\tilde{U}-d\tilde{G}-\tilde{P}dV}{\tilde{T}} = d\tilde{S} \leqslant \frac{Q}{\tilde{T}} = \frac{d\tilde{U}-\tilde{P}d\tilde{V}-\tilde{W}'}{\tilde{T}} \tag{14}$$

式中：$\tilde{P}d\tilde{V}+\tilde{W}'=\tilde{W}_e$，$\tilde{W}_e$ 是外界对系统的功，$\tilde{W}'$ 是外界对系统的非膨胀功，由此可得：

$$-d\tilde{G} \leqslant -\tilde{W}' \tag{15}$$

此式表明：处于负能谱中的系统在等温、等压过程中系统对外进行的非膨胀功（$-\tilde{W}'$）不小于系统在此过程中的 Gibbs 自由能的减少；系统 Gibbs 自由能的减少是系统在等温、等压过程中所能付出的最小功，当系统对外的非膨胀功（$-\tilde{W}'$）$=0$ 时，则有：

$$-d\tilde{G} \leqslant 0, \text{即 } d\tilde{G} \geqslant 0, \tag{16}$$

因此，处于负能谱中的系统在等温、等压过程中，系统的 Gibbs 自由能永不减少；系统的 Gibbs 自由能总趋于极大，当 $d\tilde{G}=0$ 时，系统通过此类过程达到稳定平衡。

在这里又清楚地看到，在负能谱中标示不可利用能的熵 S 趋于极小和标示可利用能的各类自由能（F、G、J 等）趋于极大，充分地表明负能谱中的系统在各种条件下所进行的一切自发过程的最终结果是可利用能增加和不可利用能减少，也即导致能量质的晋升。

表 1 分别列出了正、负能谱系统中熵、自由能和 Gibbs 势对相应的热力学过程所满足的稳定平衡判据，从表中可以看出正、负能谱系统的平衡判据是完全互补的，即，对正能谱系统是稳定的条件正好是负能谱系统的不稳定条件，反之亦然。

表 1　正、负能谱系统的稳定性平衡判据对照

热力学势	正能谱系统	负能谱系统
熵 $S, Q=0$	$dS\geqslant 0$	$d\tilde{S}\leqslant 0$
自由能 $F, T、V、N_i$ 不变	$-dF\geqslant -W_e$, $dF\leqslant 0$	$-d\tilde{F}\leqslant -\tilde{W}_e$, $d\tilde{F}\geqslant 0$
Gibbs 势 $G, T、P、N_i$ 不变	$-dF\geqslant -W'$, $dG\leqslant 0$	$-d\tilde{G}\leqslant -\tilde{W}'$, $d\tilde{G}\geqslant 0$

2　负能谱系统的稳定性

Landau L. D. 在不确定原理基础上，根据粒子间引

力势的形式($\varphi(r) \sim -\frac{\alpha}{r^s}$),对粒子能谱的基本类型作了确切而令人信服的论述[2]。他的基本结论是:系统负能谱存在的条件取决于粒子间相互作用的引力势$\varphi(r) \sim -\frac{\alpha}{r^s}$的形式。当引势的指数$s<2$时,系统必然呈现为有限下界和无限上界的正能谱;当$s=2$时,系统在一定的系数条件下,可以呈现为无下界的负能谱;只有当$s>2$时,系统必然会呈现为有上界而无下界的负能谱。现在根据 Landau L. D. 关于负能谱的这一论述来分析高密度自引力系统是否满足负能谱系统的条件。

当恒星密度足够高(例如达到中子星密度时),星体进入自引力塌缩过程中,这时星体中物质粒子间的引力场已不再是牛顿式的弱引力场了,即不再是负一次($-\frac{\alpha}{r}$)的引力场了,在静态球对对称情况下,而必须以广义相对论所给出的修改过的较精确的引力公式代替牛顿引力公式,而经广义相对论修改过的较精确的引力公式是[4]:

$$F_G(r) = -G\frac{(p+\frac{P}{c^2})(m(r)+\frac{4\pi r^3}{c^2}P)}{r(r-\frac{2Gm(r)}{c^2})} \quad (19)$$

式中ρ是物质密度$m(r)$是半径为r的球内所包含的全部质量,$P(\rho)$是压强。对于高密度物质,Landau L. D. 关于高密度物质'密度愈高愈理想'的定理成立[5]。可以把高密度物质(例如中子星或黑洞)视为理想流体。因此其物态方程可表示为:$P(\rho) \sim GM^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}$,$M$是星体总质量。现在来考虑球心原点(即星体核心)处一个粒子与其周围粒子间的引力相互作用,于是在式(19)中令$r=r_0$,r_0是粒子间距,它和密度ρ之间的关系是$\rho=m_0n=\frac{6m_0}{\pi r_0^3}$,$m_0$是粒子的质量,$n$是数密度,由此,原点附近粒子间的相互作用引力应表示为:

$$F_G(r_0) = -\frac{(\rho+\frac{P}{c^2})(m_0+\frac{4\pi r_0^3}{c^2}P)}{r_0(r_0-\frac{2Gm_0}{c^2})} \quad (20)$$

注意,$P \sim GM^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}} \sim G(\frac{6\sqrt{M}m_0}{\pi})^{\frac{4}{3}}\frac{1}{r_0^4}$,于是(2)式化为:

$$F_G(r_0) \sim G\frac{(\frac{A}{r_0^3}+\frac{B}{r_0^4})(m_0+\frac{C}{r_0})}{r_0(r_0-\frac{2Gm_0}{c^2})} \sim$$

$$-G(\frac{A}{r_0^3}+\frac{B}{r_0^4})(m_0+\frac{C}{r_0})\cdot$$

$$(1+\frac{2Gm_0}{c^2r_0}+(\frac{2Gm_0}{c^2r_0})^2+\cdots)\frac{1}{r_0^2} \quad (21)$$

式中$A=\frac{6m_0}{\pi}$,$B=G(\frac{6\sqrt{M}m_0}{\pi})^{4/3}$,$C=29.77G\frac{M^{\frac{2}{3}}m_0^{\frac{4}{3}}}{c^2}$。式(21)表明至少在球心区粒子间相互作用引力的最低负幂次项是$-G\frac{A}{r_0^5}$,然后是$\frac{1}{r_0^6}$,$\frac{1}{r_0^7}\cdots$等等,因此相应的引力势$\varphi_G(r_0)$必具有如下形式:

$$\varphi G(r_0) \sim -G(\frac{a_1}{r_0^4}+\frac{a_2}{r_0^5}+\frac{a_3}{r_0^6}+\cdots) = -G\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{r_0^{i+3}} < 0 \quad (22)$$

它的最低负幂次项是$-G\frac{\alpha_1}{r_0^4}$,然后是$\frac{\alpha_2}{r_0^5}$,$\frac{\alpha_3}{r_0^6}\cdots$等。另一方面在高密度物质中与粒子质量相联系的正定型能量是简并能,即$\varepsilon_F(r_0) \approx (\frac{9}{4\pi^2})^{2/3}\frac{h^2}{2m_0}\frac{1}{r_0^2}=\frac{b}{r_0^2}$,于是系统粒子的能量可表示为:

$$\varepsilon_0 \sim \frac{b}{r_0^2}-\frac{\tilde{a}_1}{r_0^4}-\frac{\tilde{a}_2}{r_0^5}-\cdots \quad (23)$$

其中$\tilde{a}_i=Ga_i$,由于式(23)中引力势的$s\geqslant 2$,因此当r_0足够小时,ε_0可以取任意大的负值。显然,能量ε_0对量子态的平均值也必然可以取任意大的负值,这就意味着能量的本征值可以取任意大的负值,因此由式(23)结构的粒子间作用能形式必然形成无下界的负能谱,这就表明自引力塌缩系统的核心区必然是负能谱系统。同时,还考虑到,对于高密度的自引力坍缩系统,Landau L. D. 关于高密度物质'密度愈高愈理想'的定理成立,因此,可以把自引力坍缩的高密度系统视为理想的系统,至少可以视为等效的基元激发粒子的理想系统,对于这样的系统,粒子间各级相关函数$C_i(r)\approx 0$[6],于是对于高密度系统有$\langle r^s\rangle=\langle r\rangle^s$。由此,对式(23)取平均则有:

$$\langle\varepsilon_0\rangle \sim \frac{b}{\langle r_0\rangle^2}-\frac{\tilde{a}_1}{\langle r_0\rangle^4}-\frac{\tilde{a}_2}{\langle r_0\rangle^5}\cdots \quad (24)$$

值得注意的是:平均$\langle\varepsilon_0\rangle$是不包含无序热运动能量的单粒子能量平均,因此它实际上是单粒子能量对自由能的贡献,即单粒子自由能。因此系统自由能应表示为:

$$\tilde{F}(r) = N\langle\varepsilon_0\rangle = N\{\frac{b}{\langle r_0\rangle^2}-\frac{\tilde{a}_1}{\langle r_0\rangle^4}-\cdots\} \quad (25)$$

N是总粒子数,式(25)中当$b>0$时,$\tilde{F}(r)$存在极大值,根据式(15),这时自引力支配的系统必然自发地趋向自由能极大,因此系统是稳定的。反之,当$b<0$

时，$\widetilde{F}(r)$不可能存在任何极值，这时自引力系统必然是不稳定的，系统必将在自引力作用下坍缩至物质的奇点中。不仅如此，笔者还可以一般地证明如下的函数：

$$f(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^s}, A > 0, B > 0 \qquad (26)$$

当 $s > 2$ 时，则$f(r)$的极值$f(r^*)$必然是极大值。事实上对极值点 r^* 存在条件$f'(r^*) = 0$，由此得：

$$r^* = \left(\frac{sB}{2A}\right)^{\frac{1}{s-2}}$$

于是$f(r)$的二次导量为：

$$f''(r^*) = \frac{6A}{r^4}\left(1 - \frac{(s+1)}{3}\right)\begin{cases} > 0 & s < 2 \\ = 0 & s = 2 \\ < 0 & s > 2 \end{cases} \qquad (27)$$

由此可见负能谱系统（即 $s > 2$ 的系统）的自由能密度函数只存在极大值极点。于是许多学者（其中包括 Landau L. D. 和 D. Ruelle）由此作出断言："负能谱系统是不稳定的，因而实际的负能谱系统是不存在的"的结论[5]，笔者认为这些学者犯了一个极大的错误，这就是用（习以为常的）正能谱系统稳定性判据去判定负能谱系统的稳定性，这就像以仅适用于气体的规律，如气体压强和温度成正比，去判定固体内部的压强一样的荒谬。对于负能谱系统，正如第一部分的论述可知，由于熵减原理是负能谱系统热力学的基石，因此，系统的自由能极大才是稳定的，如表 1 所示，既然高密度自引力系统的引力项的负幂次 $s \geq 3$，因此，高密度自引力系统是负能谱系统。又由式(25)知，高密度自引力系统的自由能函数存在极大值，由此可以作出结论：高密度自引力系统是稳定的。当然当自由能函数不存在极值时（如 $A < 0$ 时），系统必然是不稳定的，它必将在自引力作用下一直坍缩下去。

参考文献：

[1] 邓昭镜. 系统的能谱、温度和熵的演化(I)[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2002，27(5)：794－800.

[2] LANDAN L D. 量子力学[M]. 严肃译. 北京：人民教育出版社，1980. 65－68.

[3] 邓昭镜. 一个实际存在的负能谱系统—白矮星[J]. 西南师范大学学报(自然版)，2003，28(6)：912－917.

[4] WEINBERG S. 引力论和宇宙论[M]. 邹振隆，张历宁译. 北京：科学出版社，1980. 344－346.

[5] LANDAN L D. 统计物理学[M]. 杨训恺译. 北京：人民教育出版社，1964. 404.

[6] 雷克 L E. 统计物理现代教程[M]. 黄畇译. 北京：北京大学出版社，1983. 147－148.

Stability of the Negative Energy Spectrum Controlled by the Self-Gravitations

DENG Zhao-jing

(Department of physics Southwest China Normal Universty, Chongqing 400715, China)

Abstract: Based on thermodynamics of positive and nega tiveenergy spectrum systems the complemental correspondence relations of the stabilizing criterion between the pcsitive and negative energy spectrum systems have been established. And then according as the Landau's theory, the theory for the exsitent condition of negative energy spectrum, and combing with the exact gravitational formula revised by general relativity has demonstrated that the high-density self-gravitationa l matter are the negative energy spectrum systems. Finally, on the basis of these complemental correspondence relations combing with the specific free energy of bigh-density self-gravitational systems, the stability of the negative energy spectrum systems have been analysed.

Key words: the entropy decrease principle; free energy; the stabilizing criterion

（编辑　张　芊）