文章编号:1000 - 582X(2004)10 - 0064 - 03

多项式 $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]$ 的超级数根*

邱 学 绍[1], 王 靳 辉[2], 王 霞[1], 龙 洪 波[3], 魏 萌[2]

(1. 郑州轻工业学院 信息与计算科学系,河南 郑州 450002; 2. 解放军信息工程大学 理学院,河南 郑州 450001; 3. 广东药学院 基础部,广东 广州 510224)

摘　要:用数论中同余和整除的方法证明了:如果 a_1,a_2,Λ,a_m 为互不相同的整数,而 $(b_j,c_j)(j=1,2,\Lambda,n)$ 为互不相同的整数对,且 $c_j\neq0(j=1,2,\Lambda,n)$,则多项式 $f(x)$ 在超级数环内有且仅有 m^2+2mn 个根。从而将日格列维奇 A · Б · ,彼德罗夫 H · H · 的结论推广到了一个一般的情形。

关键词:多项式;根;整除;超级数

中图分类号:O151.1;O156　　　　**文献标识码**:A

日格列维奇 A · Б · [1]首先得到了方程 $x^5=x$ 的 15 个超级数根:0,1,-1, $X,Y,-X,-Y,X-Y,-X+Y,Z,-Z,X-Z,X+Z,-Z-X,-X+Z$。邱学绍,龙洪波,李黎[2]得到了多项式 $\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ 的 m^2 个超级数根,并讨论了超级数 X,Y 的性质,至于超级数 Z,也可以用构造的方法得到超级数的末 k 位:

$$Z_1=2,Z_k=Z_{k-1}^5(\bmod 10^k) \tag{1}$$

笔者用数论[3-4]和代数[5-6]的方法证明了多项式 $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]$ 恰有 m^2+2mn 个超级数根。

1　多项式 $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]$ 至少有 m^2+2mn 个超级数根

引理 1　超级数 Z 满足多项式 $x(x^2+1)$,即 $Z^3+Z=0$。

证　只须证对任意的正整数 k, $Z_k=c_k\cdot2^k$, $Z_k^2+1=d_k\cdot5^k$(c_k,d_k 是正整数),用数学归纳法证明如下。

当 $k=1$ 时, $Z_1=2$, $Z_1^2+1=5$,结论成立。

假设 $Z_{k-1}=c_{k-1}\cdot2^{k-1}$, $Z_{k-1}^2+1=d_{k-1}\cdot5^{k-1}$ ($k\geqslant2$, c_{k-1},d_{k-1} 是正整数),由 Z_k 的构造知

$$Z_k=Z_{k-1}^5-b_k\cdot10^k=(c_{k-1}^5\cdot2^{4k-5}-b_k\cdot5^k)\cdot2^k$$

$$Z_k^2+1=(Z_{k-1}^5-b_k\cdot10^k)^2+1=$$

$$Z_{k-1}^{10}-2\cdot10^k\cdot b_k\cdot Z_{k-1}^5+b_k^2\cdot10^{2k}+1$$

而 $Z_{k-1}^{10}+1=(Z_{k-1}^2+1)(Z_{k-1}^8-Z_{k-1}^6+Z_{k-1}^4-Z_{k-1}^2+1)$,由 Z 的末位是 2,所以 $Z_{k-1}^8-Z_{k-1}^6+Z_{k-1}^4-Z_{k-1}^2+1$ 的末位是 5,因 $k\geqslant2$,由归纳假设有 $Z_k=c_k\cdot2^k$, $Z_k^2+1=d_k\cdot5^k$(c_k,d_k 是正整数),证毕。

推论 1　$Z^3=-Z$; $Z^5=Z$; $-Z^2=Y$; $Z^4=Y$; $YZ=Z$; $Z^2+1=X$; $XZ=0$

证　由引理 1 容易得到 $Z^3=-Z$,进而得到 $Z^5=Z$。又因为 $Z(Z^2+1)=0$;进而有 $-Z^2(-Z^2-1)=0$,即 $-Z^2$ 是方程 $x(x-1)=0$ 的一个超级数根,而 $x(x-1)=0$ 只有 4 个超级数根 $0,1,X,Y$,这 4 个超级数中只有 Y 的末位数与 $-Z^2$ 的末位数同为 6,故 $-Z^2=Y$,进而 $Z^4=Y$, $YZ=Z$, $1+Z^2=X$。

因为对于任意的正整数 k,有 $X_k=a_k\cdot5^k$,而由引理 1 知 $Z_k=c_k\cdot2^k$,则对于任意的正整数 k 有 $X_kZ_k=a_kc_k\cdot10^k$,即 $XZ=0$。

引理 2　若 $cZ=0$,且 c 是整数,则 $c=0$。

证　若 $cZ=0$ 则 $c(-Z^2)=0$,即 $cY=0$,所以 $c=0$[2]。

引理 3　若 $aX+bY+cZ=0$,且 a,b,c 为整数,则 $a=b=c=0$

证　等式 $aX+bY+cZ=0$ 两边同乘以 X 得 $aX=$

* 收稿日期:2004 - 05 - 08

基金项目:河南省教育厅基金资助项目(2000110005)

作者简介:邱学绍(1957 -),男,湖北安陆人,郑州轻工业学院副教授,主要从事代数结构和运筹优化方面的研究。

0,因此 $a=0$[2],由此得 $bY+cZ=0$ 即

$$bY=-cZ \tag{2}$$

式(2)两边同乘以 Z 得

$$bZ=cY \tag{3}$$

式(2)与式(3)相乘得 $b^2Z=-c^2Z$,即 $(b^2+c^2)Z=0$,由引理 2 有 $b^2+c^2=0$,因 b,c 均为整数,所以 $b=c=0$。

推论 2　若 $a_1X+b_1Y+c_1Z=a_2X+b_2Y+c_2Z$,且 a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 都是整数,则 $a_1=a_2,b_1=b_2,c_1=c_2$。

定理 1　如果 a_1,a_2,Λ,a_m 为互异整数,而 $(b_j,c_j)(j=1,2,\Lambda,n)$ 为互异整数对,且 $c_j\neq0(j=1,2,\Lambda,n)$,则多项式 $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]$ 至少有 m^2+2mn 个超级数根,且是如下两种形式：

① $a_iX+a_jY(i,j=1,2,\Lambda,m)$；　② $a_iX+b_jY\pm c_jZ(i=1,2,\Lambda,m;j=1,2,\Lambda,n)$

证　因 $a_iX+a_jY(i,j=1,2,\Lambda,m)$ 是多项式 $\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ 的根[2],所以 $a_iX+a_jY(i,j=1,2,\Lambda,m)$ 也是 $f(x)$ 的根。另外

$$\begin{aligned}&(a_iX+b_jY\pm c_jZ-a_i)[(a_iX+b_jY\pm c_jZ-b_j)^2+c_j^2]=\\&[(b_j-a_i)Y\pm c_jZ]\{[(a_i-b_j)X\pm c_jZ]^2+c_j^2\}=\\&[(b_j-a_i)Y\pm c_jZ][(a_i-b_j)^2X+c_j^2Z^2+c_j^2]=\\&[(b_j-a_i)Y\pm c_jZ][(a_i-b_j)^2+c_j^2]X=0\end{aligned}$$

所以 $a_iX+b_jY\pm c_jZ(i=1,2,\Lambda,m;j=1,2,\Lambda,n)$ 是 $f(x)$ 的根,由题设和推论 2 知①和②给出的 m^2+2mm 个根互异。证毕。

2　多项式 $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]$ 至多有 m^2+2mn 个超级数根

引理 4　多项式 $(x-b)^2+c^2$(b,c 为整数,且 $c\neq0$)无超级数根。即对任意的超级数 B,总存在自然数 s,使得当 $k>s$ 时,2^k 不整除 $[(B_k-b)^2+c^2]$。

证　分两种情况来证明：

1) c 是奇数,这时要使 $(B_k-b)^2+c^2$ 能被 2 整除,(B_k-b) 只能是奇数,而两个奇数的平方和只能被 2 整除,而不能被 4 整除,故此时取 $s=1$ 即可。

2) c 是偶数,设 $c=c_1\cdot2^t$(其中 c_1 为奇数,且 $t\geq1$),$(B_k-b)=\varphi(k)\cdot2^{p(k)}$(其中 $\varphi(k)$ 为与 k 有关的奇数,$p(k)$ 为与 k 有关的正整数)。则当 $t\neq p(k)$ 时,$(B_k-b)^2+c^2$ 不能被 2^{2t+1} 整除；当 $t=p(k)$ 时,由情形 1)知,$(B_k-b)^2+c^2$ 不能被 2^{2t+2} 整除,故取 $s=2t+1$,当 $k>2t+1$ 时,2^k 不整除 $[(B_k-b)^2+c^2]$。

推论 3　多项式 $\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]$ 无超级数根,其中 $b_j,c_j(j=1,2,\Lambda,n)$ 为整数,且 $c_j\neq0(j=1,2,\Lambda,n)$。

引理 5[2]　设 a 为整数,B_k 为超级数 B 的末 k 位数,若对于某个非负整数 t,有 $2^t\mid(B_k-a)$,而 2^{t+1} 不整除 (B_k-a),且 $t<k$,则对于任意正整数 l,也有 $2^t\mid(B_{k+l}-a)$,但 2^{k+1} 不整除 $(B_{k+l}-a)$。

引理 6　设 b,c 为整数,且 $c\neq0$,若对于某个非负整数 t,有 $5^t\mid[(B_k-b)^2+c^2]$,而 5^t 不整除 $(B_k-b)^2+c^2$,且 $t<k$,则对于任意正整数 l,也有 $5^t\mid[(B_{k+l}-b)^2+c^2]$,但 5^{t+1} 不整除 $(B_{k+l}-b)^2+c^2$。

证　由条件可得 $(B_k-b)^2+c^2=a\cdot5^t$(其中 5 不整除 a),因此,对于任意正整数 l 有

$$\begin{aligned}&(B_{k+l}-b)^2+c^2=[d_{k+l}\cdot10^k+(B_k-b)]^2+c^2=\\&d_{k+l}^2\cdot10^{2k}+2d_{k+l}\cdot10^k(B_k-b)+(B_k-b)^2+c^2=\\&d_{k+l}^2\cdot10^{2k}+2d_{k+l}\cdot10^k(B_k-b)+a\cdot5^t=\\&[d_{k+l}^2\cdot2^{2k}\cdot5^{2k-t}+d_{k+l}\cdot2^{k+l}\cdot5^{k-t}(B_k-b)+a]\cdot5^t\end{aligned}$$

因为 $k>t$,而 a 不能被 5 整除,所以 $5^t\mid[(B_{k+l}-b)^2+c^2]$,但 5^{t+1} 不整除 $(B_{k+l}-b)^2+c^2$。

引理 7　若超级数 B 是多项式 $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)\cdot\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]$ 的根,其中 a_1,a_2,Λ,a_m 为互不相同的整数,$(b_j,c_j)(j=1,2,\Lambda,n)$ 为互不相同的整数对,$c_j\neq0(j=1,2,\Lambda,n)$,且 B 不是 $\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ 的根,则 B 必是多项式

$$(x-a_i)[(x-b_j)^2+c_j^2]\quad(1\leq i\leq m,1\leq j\leq n)$$

的根,即

1) 存在 $i(1\leq i\leq m)$,使得对于任意的正整数 k,有 $2^k\mid(B_k-a_i)$,或

2) 存在 $j(1\leq j\leq n)$,使得对于任意的正整数 k,有 $5^k\mid[(B_k-b_j)^2+c_j^2]$。

证 1)　用反证法,假设 1)不成立,则由引理 5 知,对任意的正整数 i,都有非负整数 t_i,当 $k>t_i$ 时有 2^k 不整除 $(B_k-a_i)(1\leq i\leq m)$。又由引理 4 知,对于任意正整数 j,均存在非负整数 s_j,使得当 $k>s_j$ 时,有 2^k 不整除 $(B_k-b_j)^2+c_j^2(1\leq j\leq m)$。

因此,当 $k>\max\{\sum_{i=1}^{m}t_i,\sum_{j=1}^{n}s_j\}$ 时,有 2^k 不整除 $\prod_{i=1}^{m}(B_k-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(B_k-b_j)^2+c_j^2]$,这与 B 是多项式 $f(x)$ 的根矛盾。

2)也用反证法,假设 2)不成立,则由引理 6 知,对

于任意的 $j(1\leqslant j\leqslant n)$,存在非负整数 t_j,使得当 $k>t_j$ 时,有 $(B_k-b_j)^2+c_j^2=d_j\cdot 5^{t_j}$(5 不整除 $d_j,1\leqslant j\leqslant m$)。又因为 B 不是 $\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ 的根,所以对任意的正整数 i,存在非负整数 w_i,使得当 $k>w_i$ 时有 $B_k-a_i=e_i\cdot 5^{w_i}$(5 不整除 $e_i,1\leqslant i\leqslant m$)。故当 $k>\max\{\sum_{i=1}^{m}w_i,\sum_{j=1}^{n}t_j\}$ 时有 5^k 不整除 $\prod_{i=1}^{m}(B_k-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(B_k-b_j)^2+c_j^2]$。这与 B 是 $f(x)$ 的根矛盾。

引理 8 当 a,c 是整数,且 $a\geqslant 0,c\neq 0$ 时,多项式 $(x-a)(x^2+c^2)$ 除 $x=a$ 外,至多还有两个超级数根。

证 假设多项式 $(x-a)(x^2+c^2)$ 除 $x=a$ 外,有 3 个相异的超级数根,设这 3 个根为,B,B',B'',由引理 7 及 B,B',B''的相异性知,当 k 充分大时

$$B_k-a=d_k\cdot 2^k\quad(0<d_k<5^k)\tag{4}$$

$$B_k^2+c^2=e_k\cdot 5^k\tag{5}$$

$$B'_k-a=d'_k\cdot 2^k\quad(0<d'_k<5^k)\tag{6}$$

$$B'^2_k+c^2=e'^2_k\cdot 5^k\tag{7}$$

$$B''_k-a=d''_k\cdot 2^k\quad(0<d''_k<5^k)\tag{8}$$

$$B''^2_k+c^2=e''_k\cdot 5^k\tag{9}$$

且 d_k,d'_k,d''_k 互异,由式(4)-(6),式(5)-(7)得

$$B_k-B'_k=(d_k-d'_k)\cdot 2^k$$

$$(-5^k<d_k-d'_k<5^k,\text{且 }d_k-d'_k\neq 0)\tag{10}$$

$$(B_k-B'_k)(B_k+B'_k)=(e_k-e'_k)\cdot 5^k\tag{11}$$

由式(11)可知 $5^k\mid(B_k-B'_k)(B_k+B'_k)$。容易证明,$5^k\mid(B_k-B'_k)$或 $5^k\mid(B_k+B'_k)$。否则,对于某个 $k_0\geqslant 2$,若有 $B_{k_0}-B'_{k_0}=g\cdot 5^s,B_{k_0}+B'_{k_0}=h\cdot 5^t$

其中 5 不整除 g,5 也不整除 h,且 $1\leqslant s,t\leqslant k_0,s+t=k_0$,则对于任意正整数 l

$$B_{k_0+l}-B'_{k_0+l}=(b_l-b'_l)\cdot 10^{k_0}+g\cdot 5^s$$

$$B_{k_0+l}+B'_{k_0+l}=(b_l+b'_l)\cdot 10^{k_0}+h\cdot 5^t$$

$$(b_l,b'_l\text{ 为整数})$$

这时 5^{k_0}不整除$(B^2_{k_0+l}-B'^2_{k_0+l})$,这与题设矛盾。而由式(10)知 5^k 不整除$(B_k-B'_k)$,故 $5^k\mid(B_k+B'_k)$,即 $B_k+B'_k=p_k\cdot 5^k$ (p_k 是整数)。

同理可得 $B_k+B''_k=p'_k\cdot 5^k$ (p'_k 是整数),两式相减得

$$B'_k-B''_k=(p_k-p'_k)\cdot 5^k\tag{12}$$

而式(6)-(8)得

$$B'_k-B''_k=(d'_k-d''_k)\cdot 2^k$$

$$(-5^k<d'_k-d''_k<5^k,\text{且 }d'_k-d''_k\neq 0)\tag{13}$$

显然式(12)和式(13)矛盾。证毕。

如果 a 为负整数,令 $-x=y$,则$(x-a)(x^2+c^2)=-[y-(-a)](y^2+c^2)$,由引理 8 知,除 $y=-a$ 外,至多还有两个超级数根,故$(x-a)(x^2+c^2)$除 $x=a$ 外,至多还有两个超级数根。由此得

推论 4 多项式$(x-a)(x^2+c^2)$(其中 a,c 为整数,且 $c\neq 0$),除 $x=a$ 外,至多还有两个超级数根。

推论 5 多项式$(x-a)[(x-b)^2+c^2]$(其中 a,b,c 为整数,且 $c\neq 0$,除 $x=a$ 外,至多还有两个超级数根。

定理 2 如果 a_1,a_2,Λ,a_m 为互异整数,而(b_j,c_j) $(j=1,2,\Lambda,n)$为互异整数对,且 $c_j\neq 0(j=1,2,\Lambda,n)$,则多项式

$$f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]\tag{14}$$

有且仅有 m^2+2mn 个超级数根。

证 由定理 1 知多项式(14)至少有 m^2+2mn 个超级数根,以下证明多项式(14)至多有 m^2+2mn 个超级数根。

由引理 7 知,若 B 是多项式(14)的根,但不是 $\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$的根,则 B 必是多项式

$$(x-a_i)[(x-b_j)^2+c_j^2]\quad(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)\tag{15}$$

的根,而多项式(14)恰能构成个这样的多项式,由推论 5 知,多项式(15)除了 $x=a_i$ 外至多还有两个超级数根,即多项式(14)除 $x=a_i(i=1,2,\Lambda,m)$外,至多有 $2mn$ 个超级数根。另一方面,多项式 $\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$恰有 m^2 个超级数根[2],故多项式 $f(x)$ 至多有 m^2+2mn 个超级数根。综上所述 $f(x)$ 有且仅有 m^2+2mn 个超级数根。

参考文献:

[1] JIGLEVICH A B, PETROV N N. Four Solution on Equation $x^2=x$[J]. Quantum, 1989,(11): 15-18.

[2] QIU XUESHAO, LONG HONGBO, LI LI. Super number roots and factorizations for a kind of polynomial[J]. Journal of Chongqing Universty-English Edition, 2003,1(2):24-27.

[3] 华罗庚.数论导引[M]. 北京:科学出版社,1979.

[4] BAKER A. Transcendental number theory[M]. [s.l.]: Cambia University Press, 1975.

[5] 姚慕生.高等代数[M].上海:复旦大学出版社,2002.

[6] JAIN S K, GUNAWARDENA A D. Linear Algebra: Interactive Approach[M]. 北京:机械工业出版社,2003.

(下转第 78 页)

Purification of Inclusion Body From *E. coli* Broken With Enzymolysis-ultrasound

LIU Hong[1,2], PAN Hong-chun[1,2], CAI Shao-xi[1], LI Yu-ling[2], YANG Hong-tao[2]

(1. Key Laboratory for Biomechanics and Tissue Engineering Under the State, Ministry of Education, College of Bioengineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. Southwest Pharmaceuticals Company of Limited Liability, Taiji Group, Chongqing 400038, China)

Abstract: The influence of the methods of broken *E. coli* on the purity of inclusion body is comparatively significant. The tests of broken *E. coli* were investigated by the technique of enzymolysis-ultrasound, and the influences of the addition amounts of lysozyme, the enzymolysis temperatures, the number and power of ultrasound treatment on the broken *E. coli* were studied. The degree of broken *E. coli* and the release state of proteins and nucleic acids in *E. coli* were revealed by A650, A280, A260 nm. Under the optimal conditions, the addition amount of lysozyme was 2 mg per gram wet cell, under 30 ℃ the enzymolysis time was 60 min, the number and power of ultrasound treatment was 50 times and 500 W. The purity of inclusion body through separated and washed can arrive to 57%. The higher purity of inclusion body can be obtained by the method. It is propitious to purify recombinant proteins.

Key words: enzymolysis; ultrasound; *E. coli*; inclusion body

(编辑 李胜春)

(上接第 66 页)

Super Number Roots for A Kind of Polynomial

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-a_i)\prod_{j=1}^{n}[(x-b_j)^2+c_j^2]$$

QIU Xue-shao[1], WANG Jin-hui[2], WANG Xia[1], LOGN Hong-bo[3], WEI Meng[2]

(1. Information and Computation Science Department, Zhengzhou Institute of Light Industry, Zhengzhou 450002, China;
2. College of Science, Information Engineering University of P. L. A. Zhengzhou 450001, China;
3. Basic Courses Department, Guangdong College of Pharmacy, Guangzhou 510224, China)

Abstract: The conclusion is drawn that, if integer numbers a_1, a_2, Λ, a_m are different from one anther, even integer numbers $(b_j, c_j)(j=1,2,\Lambda,n)$ are different from one anther and $c_j \neq 0(j=1,2,\Lambda,n)$, then polynomial $f(x)$ has and only has m^2+2mn different super number roots, by the method of exactly divisible and congruence. This conclusion be extended to a widespread case than the conclusion of Jiglevich.

Key words: polynomial; root; exactly divisible; super number

(编辑 张 苹)