

文章编号:1000-582X(2004)12-0056-04

以节点操作确定两任意实心多边形交集的方法*

朱爱军¹, 邓安福¹, 魏艳军¹, 唐树名²

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400030; 2. 重庆交通科研设计院, 重庆 400067)

摘要:两多边形求交问题在计算几何学、计算机图形学、地理信息系统、地质灾害预测评估及土木工程领域都有涉及。根据多边形节点所处的几何位置为其设置节点状态, 基于多边形节点状态提出了以节点操作为核心的求解两多边形交集的方法和算法。该方法概念简单, 易于计算机程序实现, 避开了多边形求交运算中较难处理的布尔运算的奇异问题, 能很好的解决重叠边、边与边相交于多边形顶点等多边形求交的难点问题。对于实心任意多边形的任意相交方式, 该方法是准确和通用的。

关键词:多边形; 节点操作; 求交运算

中图分类号: Q241.8

文献标识码: A

2 个多边形求交的问题属于计算机图形学的传统问题^[1], 在地理信息系统、地质灾害预测评估等领域也有涉及^[2]。

在土木工程领域, 数值流形方法允许出现不规则的流形单元^[3-5], 单元形状的确定也需要解决两多边形求交的问题。

所以对该问题有过较多的研究, 提出了很多的方法^[6-9]。在现有方法的基础上提出一种简便且严格的多边形求交方法, 可以适应任意实心多边形的任意相交方式。

1 两多边形求交的基本原理

1.1 两多边形边之间相交的情形

针对实心多边形, 形状和边数任意, 凹凸任意, 可以允许相交后产生多个公共区域的情况。

将用于求交的 2 个多边形命名为 P 、 Q , 在二维平面上它们用有向节点序列 $\{P\}$ 、 $\{Q\}$ 表示:

$$\{P\} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\} \quad (1)$$

$$\{Q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \quad (2)$$

序列中各元素为多边形边界节点, 按逆时针方向排列, 即多边形的前进方向都为逆时针方向。

多边形 P 的一边与多边形 Q 的一边相交一般可

以有图 1 所示的 4 种情形: 1) 交点没有落在任何边的节点上, 如图 1(a); 2) 交点为其中 1 条边的节点, 即 1 条边的节点处于另 1 条边上, 如图 1(b); 3) 2 条边有一节点相互重合, 交点即为该重合的节点, 如图 1(c); 4) 2 条边之间部分或全部重叠, 或 1 条边完全包含于另 1 条边内, 交点为 2 条边中的 2 个节点, 如图 1(d)。

1.2 两多边形边与边之间的交点对多边形节点序列的扩充

对多边形 P 和多边形 Q 的所有边界线段两两之间求交点, 其中, 图 1(a) 的情形将产生一个新的交点, 而图 1(b)、图 1(c) 的情形产生与相应节点重合的交点, 图 1(d) 的情形将产生 2 个与相应节点重合的交点。所有交点组成交点序列 $\{C\}$:

$$\{C\} = \{c_1, c_2, \dots, c_r\} \quad (3)$$

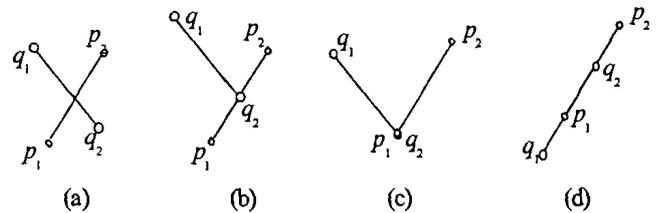


图 1 两线段的相交方式

该序列中对交点无排序的要求, 但不允许有重合的元素。

* 收稿日期: 2004-10-13

基金项目: 西部交通建设科技项目(2004-318-000-26)

作者简介: 朱爱军(1975-), 男, 贵州毕节人, 重庆大学博士研究生, 主要从事岩土工程的研究。

以多边形 P 为例在其节点序列中插入交点。交点 c_h 与多边形边界边的关系有 2 种情况：1) 处于 P 边界线段上；2) 处于 P 边界节点上。对于第 1 种情况的所有交点，则将它们插入多边形 P 的节点序列中与节点一同排序(节点序列 $\{P\}$ 的元素将增加)，但其身份仍作为交点来识别，同时为其建立一匹配序列 $\{MP\}$ ：

$$\{MP\} = \{mp_1, mp_2, \dots, mp_m\} \quad (4)$$

来标识在节点序列 $\{P\}$ 中身份为交点的元素在交点序列 $\{C\}$ 中的位置。对于第 2 种情况的所有交点，不改变多边形 P 的节点序列，但将与 c_h 重合的节点的身份改为交点来识别，同样要用匹配序列 $\{MP\}$ 来标识它们在交点序列 $\{C\}$ 中的位置。

对于多边形 Q ，对交点的处理和对节点序列的扩充与多边形 P 的方法一样，同样要为其建立匹配序列 $\{MQ\}$ ：

$$\{MQ\} = \{mq_1, mq_2, \dots, mq_n\} \quad (5)$$

扩充后的节点序列 $\{P\}$ 、 $\{Q\}$ 和交点序列 $\{C\}$ 的关系如图 2 所示。

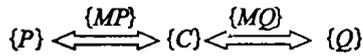


图 2 交点序列和节点序列的关系

1.3 多边形的节点状态

多边形的节点状态是方法的核心。以多边形 P 为例来说明多边形节点状态的定义。

p_i 为多边形 P 经节点扩充后的节点序列的任一点，根据它与多边形 Q 的位置关系确定它的 3 种状态：1) 处于多边形 Q 内；2) 处于多边形 Q 边界上(即身

份为交点)；3) 处于多边形 Q 外。对于多边形 P ，可以用节点状态序列 $\{KP\}$ 来标记它的每一节点的状态：

$$\{KP\} = \{kp_1, kp_2, \dots, kp_m\} \quad (6)$$

令 $kp_i = 1$ 表示节点 p_i 处于第 1 种状态；令 $kp_i = 0$ 表示节点 p_i 处于第(2)种状态；令 $kp_i = -1$ 表示节点 p_i 处于第 3 种状态。对第 2 种节点状态，在进行节点扩充时即已确定。而第 1、3 种节点状态则用相应的方法判别。

对多边形 Q 的节点状态的定义与确定方法与多边形 P 相同，同样要为其建立节点状态序列 $\{KQ\}$ ：

$$\{KQ\} = \{kq_1, kq_2, \dots, kq_n\} \quad (7)$$

1.4 节点状态确定相交公共区域边界走向

多边形 P 和 Q 有交点的边之间的多数关系如图 3 所示，图中节点序号增加的方向(箭头所指方向)为多边形 P 、 Q 的逆时针方向。

图 3(a)中，交点 c_h 在节点序列 $\{P\}$ 和 $\{Q\}$ 中的位置 p_i 、 q_j 是通过匹配序列 $\{MP\}$ 和 $\{MQ\}$ 确定的。在图 3(a)的情况中，从交点 c_h 出发，沿两多边形 P 、 Q 的逆时针方向，则与 c_h 对应的节点的下一节点 p_{i+1} 、 q_{j+1} 中必有一个处于对方区域之中，即节点 p_{i+1} 、 q_{j+1} 的状态号 $k p_{i+1}$ 、 $k q_{j+1}$ 必有一个为 1，而另一个为 -1(状态号的 1, -1 组合)。则从该交点出发，相交区域边界下一节点为 p_{i+1} 、 q_{j+1} 中状态号为 1 的节点，在此假定为节点 p_{i+1} ，则在节点序列 $\{P\}$ 中从 p_i 向后直至出现状态号为 0(交点)的节点以前的节点都是相交区域边界的节点，而对于新遇到的交点，则开始新一轮判断。

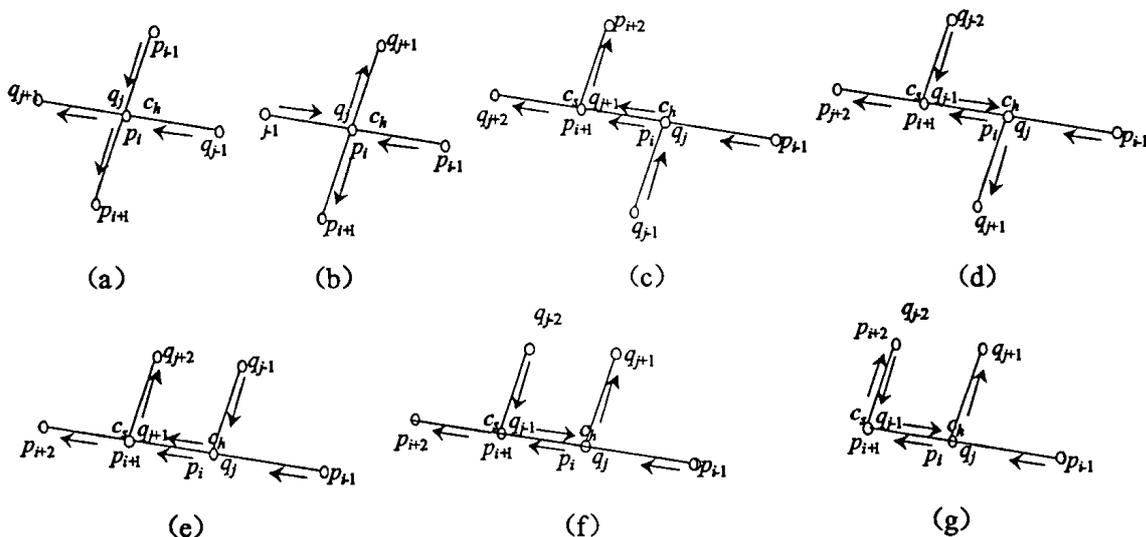


图 3 从交点位置及边界走向搜寻相交区域边界节点

限于篇幅，不对图 3 中的其它情况一一论述，而将对得到的各种 $k p_{i+1}$ 、 $k q_{j+1}$ 组合情况作出的判别列出：

1) 得到(1, -1)、(0, 1)组合时，该交点为相交区域边界节点，相交区域边界沿着状态号为 1 的方向前

进直至遇到状态号为 0 的节点(交点)，而对新遇到的状态号为 0 的节点(交点)开始新一轮判断；

2) 得到(0, 0)或(0, -1)组合时，则不能判定该交点是否为相交区域边界节点，判断工作从另外的交

点开始。而交点 c_k 是否属于相交区域边界节点则决定于搜寻出的相交区域边界最后是否指向该交点。

3) 得到 $(-1, -1)$ 组合时, 则该交点不属于相交区域边界节点, 判断工作从另外的交点开始。

2 计算机算法实现的基本过程

2.1 遍历边界获取交点序列 $\{C\}$

首先确定节点序列 $\{P\}$ 、 $\{Q\}$ 是按多边形 P 、 Q 的逆时针方向排列的, 且各自没有重合的元素。

将多边形 P 的所有边界线段和多边形 Q 的所有边界线段两两求交点, 得到初始交点序列 $\{C\}$, 并对初始交点序列 $\{C\}$ 进行判断去掉其中重合的交点得到最后的交点序列 $\{C\}$ 。

2.2 插入交点扩充节点序列

以多边形 P 的节点序列 $\{P\}$ 为例:

1) 创建节点状态序列 $\{KP\}$, 并对序列中的元素赋不为 0 的初值, 如 -5 ;

2) 创建节点匹配序列 $\{MP\}$, 并对序列中的元素赋初值, 如 -5 ;

3) 取出交点序列 $\{C\}$ 的第 1 个交点 c_1 , 再逐条取出 P 的每 1 条线段, 根据点和线在平面上的关系判断交点位于哪 1 条线段上。现假设经过判别 c_1 位于线段 $p_i - p_{i+1}$ 上, 则有 2 种情况: ① c_1 不与节点 p_i 或 p_{i+1} 重合, 则用 c_1 将线段 $p_i - p_{i+1}$ 剖分为 2 段 $p_i - c_1$ 和 $c_1 - p_{i+1}$, 并修改节点序列, 将 p_{i+1} 以后的节点 (包括 p_{i+1}) 向后移一位, 再令 p_{i+1} 等于 c_1 。同时修改状态序列 $\{KP\}$ 和匹配序列 $\{MP\}$, 即将它们在第 $(i+1)$ 以后的元素 (包括第 $i+1$ 个元素) 后移一位, 再令 $kp_{i+1} = 0$, 令 $mp_{i+1} = 1$ (当取出的交点序号为 r 时, 则令 $mp_{i+1} = r$); ② 交点与节点 p_i 或 p_{i+1} 重合, 现假设与 p_{i+1} 重合, 则不改变节点序列 $\{P\}$, 而令 $kp_{i+1} = 0$, 令 $mp_{i+1} = 1$ (当取出的交点序号为 r 时, 则令 $mp_{i+1} = r$)。

4) 逐个取出交点序列 $\{C\}$ 的其它元素进行第 3 步的操作, 直至遍历交点序列 $\{C\}$ 的所有元素。

经过以上 4 个步骤, 节点序列 $\{P\}$ 扩充完成, 同时序列 $\{KP\}$ 、 $\{MP\}$ 都被扩充和修改。

对序列 $\{Q\}$ 、 $\{KQ\}$ 、 $\{MQ\}$ 的扩充和修改的方法和对 P 的操作一样。

2.3 完成节点的状态序列的赋值

以多边形 P 为例:

经过 2.2 节的过程, 节点状态序列 $\{KP\}$ 中只有与交点对应的元素被赋予了 0 值, 其它与非交点对应的元素仍为初始值 -5 。

逐个判断 $\{KP\}$ 中的元素值, 遇到元素例如 $kp_i \neq 0$ 时, 取出它对应的节点序列 $\{P\}$ 中的节点 p_i , 判断点 p_i 与多边形 Q 的关系, 如果 p_i 处于 Q 的区域内, 则修改 $kp_i = 1$, 如 p_i 不处于 Q 的区域内, 则修改 $kp_i = -1$ 。如

此遍历节点状态序列 $\{KP\}$ 的所有元素完成对其的赋值。

对于多边形 Q 的节点状态序列 $\{KQ\}$ 的赋值同以上过程。

2.4 搜寻相交公共区域边界节点, 找出交集

首先判断交点序列 $\{C\}$ 是否为空, 如为空, 则说明两多边形 P 、 Q 边界无交点, 则任取序列 $\{P\}$ 中的任一节点判断其是否在多边形 Q 区域内, 如是, 则相交区域为多边形 P 的整个区域; 如否, 则用同样的方法判断 $\{Q\}$ 中节点是否在多边形 P 区域内, 如是, 则相交区域为多边形 Q 的整修区域; 如否, 则两多边形无相交区域。

当交点序列 $\{C\}$ 不为空时, 则进行下述过程:

从交点序列 $\{C\}$ 中的任一元素 c_k 开始, 通过匹配序列 $\{MP\}$ 和 $\{MQ\}$ 确定 c_k 在节点序列 $\{P\}$ 和 $\{Q\}$ 中的位置 p_i 、 q_j , 然后在节点状态序列 $\{KP\}$ 和 $\{KQ\}$ 中得到 $(k p_{i+1}, k q_{j+1})$ 组合, 根据其组合值不同有以下几种情况:

1) 当其组合为 $(1, -1)$ 或 $(1, 0)$ 时, 则以 c_k 为两多边形相交区域边界的第 1 节点予以记录, 并且将 c_k 在交点序列 $\{C\}$ 中的位置记入位置变量 $site$, 相交区域沿节点状态为 1 的节点序列前进, 现假设沿节点序列 $\{P\}$ 前进。前进中在出现节点状态为 0 的节点 (交点) 前, 该方向上遇到的所有节点都为相交区域边界节点。遇到节点状态为 0 的节点 (交点) 时停止前进, 现假设该节点为 p_r , 则通过图 2 的关系可以有: $p_r \rightarrow c \rightarrow q_s$, 此时考察节点状态组合 $(k p_{r+1}, k q_{s+1})$, 如果其值为 $(1, -1)$ 或 $(1, 0)$, 则重复上述过程。如果组合值为 $(0, 0)$ 或 $(0, -1)$ 时, 则相交区域边界沿着节点状态为 0 的方向前进。以上过程直到前进中遇到位置变量 $site$ 中记录的交点时为止, 由此得到了一个相交的公共区域。最后检查交点序列 $\{C\}$ 中的交点是否在搜寻过程中全部遇到, 如是, 则表明多边形 P 、 Q 只产生了一个相交区域; 如否, 则表明多边形 P 、 Q 可能产生了一个以上的相交区域, 则选取 $\{C\}$ 中任一个没有遇到过的交点重复上述过程;

2) 如果遍历 $\{C\}$ 中的所有交点, 其组合都为 $(0, 0)$ 时, 则说明两多边形完全重合, 则交集就是两多边形本身;

3) 当其组合全都为 $(-1, -1)$ 时, 则两多边形无交;

4) 当其组合全都为 $(0, -1)$ 或为 $(0, -1)$ 与 $(0, 0)$ 时, 则需要较多的判断过程:

① 在节点序列 $\{P\}$ (或 $\{Q\}$) 中找出第 1 对节点状态满足 $kp_i = 0$ 且 $kp_{i+1} = 0$ 的节点 p_i 和 p_{i+1} , 则取线段 $p_i - p_{i+1}$ 的中点来判断其是否在多边形 Q 内, 如否, 则寻找下一对 $kp_r = 0$ 且 $kp_{r+1} = 0$ 的节点 p_r 和 p_{r+1} ; 如是,

则 p_i 与 p_{i+1} 是两多边形公共区域的节点, 将 p_i 在交点序列 $\{C\}$ 中位置记入位置变量 $site$, 并从点 p_i 开始沿节点序列 $\{P\}$ 前进。

②接第 1 步, 如果前进中的节点状态一直为 0, 则直至遇到由 $site$ 记录的交点位置对应的节点 p_i 为止, 形成一个公共区域。再对交点序列中未使用过的元素进行新的判断寻找其它的公共交集;

③接第 1 步, 如前进中遇到到节点状态为 -1 的点即停下, 此处设点 p_{r+1} 为前进中遇到的第一个节点状态为 -1 的点, 则 $k_{p_r} = 0, k_{p_{r+1}} = -1$, 由节点序列和交点序列的匹配关系有: $p_r \rightarrow c \rightarrow q_i$, 可以找到节点序列 $\{Q\}$ 中的节点 q_i , 此时必有 $k_{q_{i+1}} = 0$ 。

④接第 3 步, 此时公共交集的搜索方向沿节点序列 $\{Q\}$ 前进, 并按第 2 与第 3 的过程直至前进到由 $site$ 记录的交点位置得到一个相交公共区域。再对交点序列中未使用过的元素进行新的判断寻找其它的公共交集;

⑤如果遍历节点序列与都未出现满足 $k_{p_i} = 0$ 且 $k_{p_{i+1}} = 0$ (或 $k_{q_j} = 0$ 且 $k_{q_{j+1}} = 0$) 的一对节点, 则两多边形无相交的公共区域;

⑥如果找到的所有满足 $k_{p_i} = 0$ 且 $k_{p_{i+1}} = 0$ 的节点 p_i 与 p_{i+1} 构成的线段 $p_i - p_{i+1}$ 的中点都不在对方区域内, 则两多边形无相交的公共区域。

由上述基本过程则可严格地对任意实心多边形的任意相交方式进行判别而得到它们的相交区域。

3 结 语

此方法以节点操作为核心, 涉及的概念简单, 引入

的判别参数少, 易于计算机程序的实现, 不作任何近似处理, 得到的结果是准确的。同时, 它用很简单的方式避免了求交运算中较难处理的布尔运算的奇异问题, 能很好解决重叠边、边与边相交于多边形顶点等多边形求交的难点问题。通过大量算例证明, 该方法对各种实心多边形的各种相交方式都是适应和通用的。

参考文献:

- [1] 张华春, 王淳. 相交多边形轮廓线的获取[J]. 技术探讨, 1997, (1): 18 - 20.
- [2] 李闽峰. 生成两个不规则多边形相交区域的边界数据的方法[J]. 中国地震, 1994, 10(2): 188 - 190.
- [3] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [4] 蔡永昌. 流形方法的理论与应用研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2001.
- [5] 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法中的几点改进[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(6): 33 - 36.
- [6] 于雷易, 边馥苓, 万丰. 一种多边形交、并、差运算的有效算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2003, 28(5): 615 - 618.
- [7] 杨维芳. 两个复杂多边形求交的矢量算法[J]. 兰州铁道学院学报(自然科学版), 2002, 21(1): 108 - 110.
- [8] 张宝琳. 计算两凸多边形交集面积的计算机算法[J]. 计算机工程与应用, 2001, 9(2): 128 - 129.
- [9] 朱雅音, 王化文, 万丰等. 确定两个任意简单多边形交、并、差的算法[J]. 计算机研究与发展, 2003, 40(4): 576 - 583.

Method to Determine the Intersection of Two Arbitrary Solid Polygon With Node Operation

ZHU Ai-jun¹, DENG An-fu², WEI Yan-jun¹, TANG Shu-ming²

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Chongqing Communications Research and Design Institute, Chongqing 400067, China)

Abstract: The method to polygon' intersection is applied in computational geometry, computer graphics, GIS, evaluation of geo-hazards and civil engineering. Based on the node state of polygon, the authors propose the method and algorithm of polygon' intersection, the key to which is node operation. This method's concept is simple; and it is easy to computer program's implementation. It avoids to singular problem of Boolean Operation, and is easy to solve the problem of overlapping side and sides intersecting in node of polygon. For the arbitrary way of intersecting of arbitrary solid polygon, this method is accurate and general.

Key words: polygon; node operation; intersection algorithm