文章编号:1000-582X(2004)12-0120-04

凸度量空间内渐近拟非扩张映射不动点的迭代*

田有先
(重庆邮电学院 计算机学院,重庆 400065)

摘 要:2001 年和 2002 年 Liu Qihou 推广了 Petryshgh 和 Williamson, Ghosh 和 Debnath 分别在 1973 年和 1977 年的结果,在 Banach 空间和一致凸 Banach 空间证明了 Ishikawa 迭代序列和带误差的 Ishikawa 迭代序列收敛于渐近拟非扩张映射不动点的若干充要条件。笔者在凸度量空间内,定义了带误差的 Ishikawa 迭代程序,并且证明了带误差的 Ishikawa 迭代程序收敛于渐近拟非扩张映射不动点的若干充要条件。该结果统一和推广了近期文献中的许多已知结果。

关键词:凸度量空间;渐近非扩张映射;渐近拟非扩张映射;带误差的 Ishikawa 迭代程序;不动点
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A

1 研究目的及预备知识

1973 年,Petryshyn 和 Williamson[1] 证明了 Picard 迭代序列和 Mann 迭代序列收敛于拟非扩张映射不动点的一个充要条件。1997 年,Ghosh 和 Debnath[2] 推广了文献[1]的结果,给出了 Ishikawa 迭代序列收敛于拟非扩张映射不动点的一个充要条件。2002 年和 2003 年,文献[3,4]分别在 Banach 空间讨论了渐近非扩张映象迭代序列的收敛性与稳定性。2001 年和 2002 年 Liu Qi hou[5-7] 在 Banach 空间和一改凸 Banach 空间证明了 Ishikawa 迭代序列和带误差的 Ishikawa 迭代序列收敛于渐近拟非扩张映射不动点的若干充要条件,2003 年文献[8]在凸度量空间内证明了不带误差的渐近拟非扩张映象 Ishikawa 迭代序列的收敛的若干充要条件,本文目的是在凸度量空间内采用文献[9]的技巧,对渐近拟非扩张映射定义带误差的 Ishikawa 迭代程序并且给出所定义的迭代序列收敛于渐近拟非扩张映射不动点的若干充要条件。这个的结果推广和统一了文献[1-2,5-8]的相应结果。

定义 1 设(X,d)是一度量空间,$I=[0,1]$,α_n, β_n, γ_n 是$[0,1]$中的实序列,并且 $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$。映射 $W:X^3\times I^3\to X$ 称为 X 的一个凸结构,如果满足以下条件:对任何$(x,y,z,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)\in X^3\times I^3$ 及 $u\in X$

$$d(u,w(x,y,z,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n))\leq \alpha_n d(u,x)+\beta_n d(u,y)+\gamma_n d(u,z) \tag{1}$$

如果(x,d)是具有凸结构 w 的度量空间,则(x,d)称为凸度量空间。

应该指出,每一线性赋范空间都是凸度量空间的例子。但存在某些凸度量空间,它们不能嵌入到任一赋范空间[10]。

定义 2 设(x,d)是一度量空间,T 称为非扩张,如果

$$d(Tx,Ty)\leq d(x,y)\quad \forall x,y\in X \tag{2}$$

定义 3 设(x,d)是一度量空间,T 称为渐近非扩张,如果存在 $k_n\in[0,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$,使得

$$d(T^nx,T^ny)\leq(1+k_n)d(x,y),\forall x,y\in X \tag{3}$$

定义 4 设(x,d)是一度量空间,T 称为拟非扩张,如果 $F(T)\neq\varnothing$,使得

$$d(Tx,p)\leq d(x,p) \tag{4}$$

$\forall x\in X,\forall p\in F(T)$, $F(T)$表示不动点集。

定义 5 设(x,d)是一个度量空间,T 称为渐近拟非扩张,如果存在 $k_n\in[0,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$,使得

$$d(T^nx,p)\leq(1+k_n)d(x,p) \tag{5}$$

$\forall x\in X,\forall p\in F(T)$, $F(T)$表示不动点集。

* 收稿日期:2004-06-25
基金项目:重庆市教委重点项目(050308)
作者简介:田有先(1948-),男,四川宣汉人,重庆邮电学院教授,主要从事非线性泛函分析研究。

由上述定义可知，如果 $F(T)$ 非空。那么一个非扩张射必定是拟非扩张映射，并且一个渐近非扩张映射必定是渐近拟非扩张映射，但是其逆不成立。

定义 6　设 (x,d) 是具凸结构 $W:X^3\times I^3\to X$ 的凸度量空间，$T:X\to X$ 是一渐近拟非扩张映射。$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{\gamma_n\}$，$\{\alpha'_n\}$，$\{\beta'_n\}$，$\{\gamma'_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的 6 个序列且 $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$，$\alpha'_n+\beta'_n+\gamma'_n=1$，$n=0,1,2,\cdots$，而且 $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma'_n<+\infty$。对任给的 $x_0\in X$，定义序列 $\{x_n\}$ 如下：

$$\begin{cases}x_{n+1}=w(x_n,Ty_n,u_n,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)\\ y_n=w(x_n,Tx_n,v_n,\alpha'_n,\beta'_n,\gamma'_n)\end{cases}\tag{6}$$

这里 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 是 X 中的两个序列满足如下条件：对任意的非负整数 n,m，$0\leqslant n<m$，如果 $\delta(A_{n,m})>0$，则有

$$\max_{n\leqslant i,j\leqslant m}\{d(x,y):x\in\{u_i,v_i\},\ y\in\{x_j,y_j,Ty_j,u_j,v_j\}\}<\delta(A_{n,m})$$

其中 $A_{n,m}=\{x_i,y_i,Tx_i,Ty_i,u_i,v_i\}\quad n\leqslant i\leqslant m$　　(※)

$$\delta(A_{n,m})=\sup_{x,y\in A_{n,m}}d(x,y)$$

则 $\{x_n\}$ 称为渐近拟非扩张映射 T 的具误差的 Ishikawa 型迭代序列。

由文献[11]知，Ishikawa 迭代序列是式(6)中当 $\gamma_n=\gamma_n'=0$ 和 $u_n=v_n=0$ 的特殊情形。

引理 1　设 X 是一个完备凸度量空间，T 是一个渐近拟非扩张映射，$F(T)$ 非空。如果 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是带误差的 Ishikawa 迭代序列，有：

（Ⅰ）$d(x_{n+1},p)\leqslant(1+k_n)^2d(x_n,p)+S_n$，$\forall n\in N$，$\forall p\in F(T)$. 其中 $S_n=\beta_n(1+k_n)\gamma'_nd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)$。

（Ⅱ）存在一个常数 $M>0$，使得

$$d(x_{n+m},p)\leqslant Md(x_n,p)+M\sum_{k=n}^{n+m-1}S_k,\quad \forall n,m\in N,\forall p\in F(T).$$

证（Ⅰ）：因 T 是一个渐近拟非扩张映射，故对所有 $p\in F(T)$，有

$$d(x_{n+1},p)=d(w(x_n,T^ny_n,u_n,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n),p)\leqslant \alpha_nd(x_n,p)+\beta_nd(T^ny_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant \alpha_nd(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)d(y_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)\tag{7}$$

$$d(y_n,p)=d(w(x_n,T^nx_n,x_n,v_n,\alpha'_n,\beta'_n,\gamma'_n),p)\leqslant \alpha'_nd(x_n,p)+\beta'_nd(T^nx_n,p)+\gamma'_nd(v_n,p)\leqslant \alpha'_nd(x_n,p)+\beta'_n(1+k_n)d(x_n,p)+\gamma'_nd(v_n,p)\tag{8}$$

把式(8)代入式(7)，得

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},p)&\leqslant\alpha_nd(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)[\alpha'_nd(x_n,p)+\beta'_n(1+k_n)d(x_n,p)+\gamma_n'd(v_n,p)]+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant\\ &\alpha_nd(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)\alpha_n'd(x_n,p)+\beta_n\beta_n'(1+k_n)^2d(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)\gamma_n'd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)=\\ &\alpha_nd(x_n,p)+(1-\alpha_n-\gamma_n)(1+k_n)\alpha_n'd(x_n,p)+(1-\alpha_n-\gamma_n)\cdot\beta_n'(1+k_n)^2d(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)\gamma_n'd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant\\ &\alpha_nd(x_n,p)+(1-\alpha_n)(1+k_n)^2\alpha_n'd(x_n,p)+(1-\alpha_n)\beta_n'(1+k_n)^2\cdot d(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)\gamma_n'd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant\\ &\alpha_n(1+k_n)^2d(x_n,p)+(1-\alpha_n)(1+k_n)^2(\alpha_n'+\beta_n')d(x_n,p)+\beta_n(1+k_n)\gamma_n'd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)\leqslant\\ &(1+k_n)^2d(x_n,p)+S_n\end{aligned}$$

其中　$S_n=\beta_n(1+k_n)\gamma_n'd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)$

（Ⅰ）被完全证明.

证（Ⅱ）：由（Ⅰ）可得

$$\begin{aligned}d(x_{n+m},p)&\leqslant(1+k_{n+m-1})^2d(x_{n+m-1},p)+S_{n+m-1}\leqslant e^{2k_{n+m-1}}d(x_{n+m-1},p)+S_{n+m-1}\leqslant e^{2(k_{n+m-1}+k_{n+m-2})}\cdot\\ &d(x_{n+m-2},p)+e^{2k_{n+m-1}}(S_{n+m-2}+S_{n+m-1})\leqslant\cdots\cdots\leqslant\\ &e^{2\sum_{i=n}^{n+m-1}k_i}d(x_n,p)+e^{2\sum_{i=n}^{n+m-1}k_i}\cdot\sum_{k=n}^{n+m-1}S_k\leqslant Md(x_n,p)+M\sum_{k=n}^{n+m-1}S_k\end{aligned}$$

其中 $M=e^{2\sum_{i=0}^{\infty}k_i}$，（Ⅱ）证毕。

引理 2　（见文献[4]引理 2）设数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $a_n\geqslant0$，$b_n\geqslant0$，$c_n\geqslant0$，对任意的 $n\in N$，有 $a_{n+1}\leqslant(1+c_n)a_n+b_n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$，则

（a）$\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在；

（b）如果 $\lim_{n\to\infty}\inf a_n=0$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

2　主要结果及其论证

定理 1　设 X 是一个完备凸度量空间，$T:X\to X$ 是一个渐近拟非扩张映射（T 不必连续），并且 $F(T)$ 非空，假定 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由式(6)定义的带误差的 Ishikawa 型迭代序列，则当且仅当 $\lim_{n\to\infty}\inf d(x_n,F(T))=0$ 时 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 T 的不动点。其中 $d(y,c)$ 表示 y 与 c 间的距离。即 $d(y,c)=\inf_{\forall x\in c}d(y,c)$.

证明：由引理 1，有

$$d(x_{n+m},p)\leqslant(1+k_{n+m-1})^2d(x_{n+m-1},p)+S_n\quad\forall p\in F(T),\forall n\in N.\tag{9}$$

其中 $S_n=\beta_n(1+k_n)\gamma_n'd(v_n,p)+\gamma_nd(u_n,p)$. 因为 $0\leqslant\beta_n\leqslant1$，$\sum_{n=1}^{\infty}k_n<+\infty$，$0\leqslant\gamma_n\leqslant1$，由定义 6 的式

(※),有 $d(u_n,p)$、$d(v_n,p)$ 是有界的,于是 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n < +\infty$。由式(9)有:

$$d(x_{n+1},F(T)) \leqslant (1+k_n)^2 d(x_n,F(T)) + S_n$$

因 $\liminf_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0$,并且由引理 2,可得到

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,F(T)) = 0$$

下面证明 $\{x_n\}_{n+1}^{\infty}$ 是一个柯西序列。

$\forall \varepsilon>0$,由引理 1 知,必存在常数 $M>0$,使得

$$d(x_{n+m},p) \leqslant Md(x_n,p) + M\sum_{k=n}^{n+m-1} S_k, \forall p \in F(T)$$
$$\forall n,m \in N. \qquad (10)$$

因为 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n < +\infty$,必存在常数 N_1,使得当 $n \geqslant N_1$,时,有

$$d(x_n,F(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \text{且} \sum_{k=n}^{\infty} S_k \leqslant \frac{\varepsilon}{6M}$$

因此 $d(x_{N_1},F(T)) \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}$

必存在 $P_1 \in F(T)$,使得 $d(x_{N_1},p_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$ 由式(10),就得到当 $n \geqslant N_1$ 时,有

$$d(x_{n+m},x_n) \leqslant d(x_{n+m},p_1) + d(x_n,p_1) \leqslant$$
$$Md(x_{N_1},p_1) + Md(x_{N_1},p_1) + M(\frac{\varepsilon}{6M}+\frac{\varepsilon}{6M}) \leqslant$$
$$M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

这表明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个 Cauchy 序列。又因为 X 是完备的,于是 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在,设 $\lim_{n\to\infty} x_n = p$,下证 p 是不动点。即 $p \in F(T)$。

$\forall \varepsilon'>0$,因 $\lim_{n\to\infty} x_n = p$,于是存在正整数 N_2,使得当 $N \geqslant N_2$ 时

$$d(x_n,p) \leqslant \varepsilon'/2(2+k_1) \qquad (11)$$

$\lim_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0$,意味着存在正整数 $N_3 \geqslant N_2$,使得当 $n \geqslant N_3$ 时,

$$d(x_n,F(T)) \leqslant \varepsilon'/3(3K_1+4)$$

于是,存在 $p' \in F(T)$,使得

$$d(x_{N_3},p') \leqslant \varepsilon'/2(3K_1+4) \qquad (12)$$

由式(11)和式(12),有

$$d(Tp,p) \leqslant d(Tp,P') + d(p',Tx_{N_3}) + d(Tx_{N_3},p') +$$
$$d(p',x_{N_3}) + d(x_{N_3},p) \leqslant d(Tp,P') + 2d(Tx_{N_3},p') +$$
$$d(x_{N_3},p') + d(x_{N_3},p) \leqslant (1+k_1)d(p,p') +$$
$$2(1+k_1)d(x_{N_3},p') + d(x_{N_3},p') + d(x_{N_3},p) \leqslant$$
$$(1+k_1)[d(p,x_{N_3}) + (x_{N_3},p')] +$$
$$2(1+k_1)d(x_{N_3},p') + d(x_{N_3},p') + d(x_{N_3},p) =$$
$$(2+k_1)d(x_{N_3},p) + (4+3k_1)d(x_{N_3},p') \leqslant$$
$$(2+k_1)\varepsilon'/2(2+k_1) + (4+3k_1)\varepsilon'/2(3k_1+4) = \varepsilon'$$

因为 ε' 是任意的正数,故有 $Tp=p$,即 p 是不动点,定理 1 被完全证明。

定理 2 设 X 是一个完备凸度量空间,$T:X\to X$ 是一个拟非扩张映射(T 不必连续),并且 $F(T)$ 非空。假定 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由式(6)定义的带误差的 Ishikawa 型迭代序列,则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 T 的不动点当且仅当 $\liminf_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0$。其中 $d(y,c)$ 表示 y 与 c 间的距离,即 $d(y,c)=inf_{\forall x\in c}d(y,c)$。

用同样的方法可证明定理 2 成立。

定理 3 设 X 是一个完备凸度量空间。$T:X\to X$ 是一个渐近非扩张映射(T 不必连续),且 $F(T)$ 非空。假定 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由式(6)定义的带误差的 Ishikawa 型迭代序列,则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 T 的不动点当且仅当 $\liminf_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0$。

由定理 1,定理 3 容易被证明。

参考文献:

[1] PETRYSHYN W V, WILLIAMSON T E. Strong and Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Quasi-nonexpansive Mappings[J]. J Math Anal Appl, 1973,43:459-497.

[2] GHOSH M K, DEBNATH L. Convergence of Ishikawa Iterates of Quasi-nonexpansive Mappings[J]. J Math Anal Appl, 1997,207:96-103.

[3] 田有先. 渐近非扩张映象 Ishikawa 迭代程序的收敛性与稳定性[J]. 四川大学学报(自),2002,(6):1 019-1 022.

[4] 田有先,张石生. 渐近非扩张映象迭代序列的收敛性[J]. 西北大学学报(自),2003,(6):641-644.

[5] LIU QIHOU. Iterative Sequence for Asymptotic Quasi-nonexpansive Mappings[J]. J Math Anal Appl, 2001,259:1-7.

[6] LIU QIHOU. Iterative Sequence for Asyonptotically Quasi-nonexpansive Mappings With Error Member[J]. J Math Anal Appl, 2001,259:18-24.

[7] LIU QIHOU. Iteration Sequence for Asymptotically Quasi-nonexpansive Mapping With an Error Member of Uniform Convex Banach Space[J]. J Math Anal Appl, 2002,226:468-471.

[8] 田有先. 凸度量空间内渐近拟非扩张映象 Ishikawa 迭代序列的收敛性[J]. 四川大学学报(自),2003,(6):1 027-1 031.

[9] TIAN Y X, ZHANG S S, Convergence of Ishikawa Type Iterative Sequence With Errors for Quasi-contractive Mapping

in Convex Metric Spaces [J]. J Appl Math Mech, 2002, (9):1 001 - 1 008.

[10] TAKAHASHI. A Convexity in Metric Space and Nonexpansive Mappings[J]. J I Kodai Math Sem Kep, 1970, 22: 142 - 149.

[11] ZHANG S S. Convergence Problem of Ishikawa Type Iterative Sequence With Errors for ϕ-quasi-contractive Mappings [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21 (11):1 - 10.

Convergence of Ishikawa Type Iterative Sequence With Errors for Asymptotically Quasi-nonexpansive Mappings in Convex Metric Spases

TIAN You-xian

(Institute of Computer Science & Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: Liu Qihou, in 2001 and in 2002, extended the results of Petryshgh and Williamson, Ghosh and Debnath respectively in 1973 and in 1977, proved some sufficient and necessary condition for Ishikawa iterative sequence and for Ishikawa iterative sequence with error member of asymptotically quasi-nonenpansive mappings to converge to fixed poind in Banach space and in uniform convex Banach space. In convex metric spaces, the Ishikawa iteration process with errors is defined for asymptotically quasi-nonexpansive mappings. Some sufficient and nevessary conditions proved for the iterative schene converges to the fixed point of the asymptotically quasi-nonexpansire mappings. These results qeneralize and unify many important known results in recent literature.

Key words: convex metric space; asymptotically nonexpansive mappings; asymptotically quasi-nonexpansive mapings; ishikawa iteration process with errors; fixed point

(编辑　吕赛英)

(上接第 119 页)

Frame of Parallel Data Extraction Interface for Commercial OLAP

FENG Yong, WU Kai-gui, XIONG Zhong-yang, WU Zhong-fu

(College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The OLTP system can not afford the demand of decision support due to the drastic commerce competition, so the appearance of OLAP technology is importanct. The key technical of OLAP, the classical resolvent of data warehouse and the methods of data preprocessing are studied. A frame of parallel data extraction interface for commercial OLAP is proposed. Data preprocessing technology (data cleaning, data integration and transform, data reduction) connected with the frame is practically studied and applied. The eficiency and the practicality of the frame are illustrated by practical application.

Key words: OLAP; data extraction; data cleaning; data integration and transform; data reduction

(编辑　张　苹)