文章编号:1000 - 582X(2004)01 - 0131 - 04

具有混合约束二次函数的逼近方法*

王 开 荣
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘　要:在前人给出了解等式约束问题的一种降维算法的基础上对非线性等式约束进行了线性逼近,构造了等式约束问题的近似算法,进一步考查了约束条件是既含等式约束又含不等式约束的混合约束,目标函数是二次函数的非线性规划问题。增加松弛变量将不等式约束转化为等式约束,利用线性逼近的方法将问题转化为二次规划,再利用降维算法作近似计算。数值实验的结果表明该近似算法是可行的。

关键词:最优化;不等式约束;线性逼近;二次规划
中图分类号:O221.2　　**文献标识码**:A

1　方法的理论依据

设有最优化问题

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } g(x) = 0 \tag{1}$$

其中 $f: R^n \to R; g: R^n \to R^m, g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))^T, m < n$。记 $t = n - m$

$$P(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k_1}}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_{k_2}}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_{k_t}}\right)^T \tag{2}$$

$$Q(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{l_1}}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_{l_2}}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_{l_m}}\right)^T \tag{3}$$

$$N(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{k_1}} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{k_2}} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{k_t}} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{k_1}} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{k_2}} & \cdots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{k_t}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{k_1}} & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{k_2}} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{k_t}} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{l_2}} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{l_m}} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{l_2}} & \cdots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{l_m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{l_2}} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{l_m}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中 $\{k_1, k_2, \cdots, k_t\} + \{l_1, l_2, \cdots, l_m\} = \{1, 2, \cdots, n\}$

定理 1[1]　设 $x^* \in R^n$ 是问题(1)的解, $f: R^n \to R; g: R^n \to R^m$ 连续可微,矩阵 $M(x^*)$ 非奇异,则有

$$P(x^*) = [M(x^*))^{-1}N(x^*)]^T Q(x^*)$$

定理 2[1]　若 $x^* \in R^n$ 是方程组

$$\begin{cases} P(x) = [M(x))^{-1}N(x)]^T Q(x) \\ g(x) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

的解,且满足:1) $M(x^*)$ 非奇异;2) 矩阵 $L(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 g_i(x^*)$ 在切平面 $T = \{x \in R^n \mid \nabla g(x^*)^T x = 0\}$ 上正定,其中 $\lambda = -(M(x^*)^{-1})^T Q(x^*)$。则 x^* 是问题(1)的严格局部极小点。

由定理 2 的结论,可以通过求解方程组(6)来得到问题(1)的解,而且方程组(6)仅含有 n 个方程。若用传统的 Lagrange 乘子法来求解问题(1)所的得方程有 $n + m$ 个。当目标函数是二次函数,约束条件是线性等式约束时,方程组(6)是线性方程组,求解方程组

* 收稿日期:2003 - 09 - 26
作者简介:王开荣(1965 -),男,重庆垫江人,重庆大学讲师,在读博士研究生,主要从事最优化理论和应用,技术经济研究。

(6) 是轻而易举的事。但当目标函数不是二次函数,约束条件不是线性等式约束时,方程组(6) 就是非线性方程组,求解时将产生巨大的困难。

2 目标函数是二次函数的混合约束非线性规划问题

设有非线性规划问题

$$\min \quad f(x) = \frac{1}{2}x^{T}Ax + b^{T}x + c$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \leqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

其中 A 为 n 阶方阵,$g: R^n \to R^m$;$h: R^n \to R^l$ 是非线性函数。

在文献[2] 中,约束条件是非线性等式约束,采用线性逼近的方法将非线性等式约束化为线性等式约束。当约束条件中含有不等式约束时,可以通过增加松弛变量将其转化为等式约束。但是当约束条件是非线性约束时,矩阵 $M(x)$ 特别是 $M(x)^{-1}$ 的求解相当困难。为了克服这个困难,仍然采用线性逼近的方法将非线性等式约束化为线性等式约束[3-7]。

首先将问题(7) 的不等式约束增加松弛变量得到等式约束问题:

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^{T}Ax + b^{T}x + c$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} g_i(x) = 0 & i = 1,2,\cdots,m \\ h_j(x) + x_{n+j}^2 = 0 & j = 1,2,\cdots,l \end{cases} \tag{8}$$

令 $y = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+l})^T$,$\bar{h}_j(y) = h_j(x) + x_{n+j}^2$;对式(8) 的约束条件在 $x^{(k)}$,$y^{(k)}$ 处按一阶 Taylor 公式展开有:

$$g_i(x) = g_i(x^{(k)}) + \nabla g_i(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}) + o(\| x - x^{(k)} \|)$$
$$\bar{h}_j(y) = \bar{h}_j(y^{(k)}) + \nabla \bar{h}(y^{(k)})^T(y - y^{(k)}) + o(\| y - y^{(k)} \|) = h_j(x^{(k)}) + x_{n+j}^2 + \nabla h_j(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}) + 2x_{n+j}^{(k)}(x_{n+j} - x_{n+j}^{(k)}) + o(\| y - y^{(k)} \|)$$

令: $\hat{g}_i(x) = g_i(x^{(k)}) + \nabla g_i(x^{(k)})^T(x - x^{(k)})$

$$\bar{h}_j(y) = h_j(x^{(k)}) + x_{n+j}^2 + \nabla h_j(x^{(k)})^T \cdot (x - x^{(k)}) + 2x_{n+j}^{(k)}(x_{n+j} - x_{n+j}^{(k)})$$

由此有近似的线性等式约束问题:

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^{T}Ax + b^{T}x + c$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \hat{g}_i(x) = 0 & i = 1,2,\cdots,n \\ \hat{h}_j(y) = 0 & j = 1,2,\cdots,l \end{cases} \tag{9}$$

算法:

1) 给定初值 $y^{(0)}$,最大迭代次数 N_0,精度 $\varepsilon > 0$;

2) 对 $k = 1,2,\cdots,N_0$,做到第 7 步;

3) 根据 $y^{(k)}$ 的值构造形如式(9) 的近似非线性规划;

4) 在 $y^{(k)}$ 处构造形如式(4)、(5) 的矩阵 $N(y^{(k)})$,$M(y^{(k)})$ 并寻找出相应的函数 $P(y)$,$Q(y)$。

5) 构造线性方程组

$$\begin{cases} P(y) = [(M(y^{(k)}))^{-1}N(y^{(k)})]^T Q(y) \\ \hat{g}(y) = 0 \\ \hat{h}(y) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

6) 求解线性方程组(10) 得到的解作为 $y^{(k+1)}$;

7) 当 $\| y^{(k+1)} - y^{(k)} \| < \varepsilon$ 时,停止计算,输出近似最优解 $x^{(k+1)}$; 否则转 3)。

8) 输出超过最大迭代次数的信息,停机。

当算法产生的序列 $\{y^{(k)}\}$ 收敛时,令 $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = y^*$ 则有

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^* \quad i = 1,2,\cdots,n$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{n+j}^{(k)} = x_{n+j}^* \quad j = 1,2,\cdots,l$$

则由问题(10) 的约束条件有:

$$g_i(x^*) = 0 \quad i = 1,2,\cdots,n$$
$$h_j(x^*) \leqslant 0 \quad j = 1,2,\cdots,l$$

即 x^* 是问题(7) 的可行点,且 $x^{(k)}$ 是问题(10) 目标函数的最优解,所以 x^* 是问题(7) 的最优解。

3 数值实验

例 1 求解最优化问题

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{11}$$

解 增加松弛变量有等式约束问题

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5 = 0 \\ g_3(x) = -x_1 + x_4^2 = 0 \\ g_4(x) = -x_2 + x_5^2 = 0 \end{cases}$$

有近似的最优化问题:

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{s.t.} \ g_i(x^{(k)}) + \nabla g_i(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}) = 0$$
$$i = 1,2,3,4,5$$

问题(11) 的准确解为 $(0.8, 1.6)^T$,取初值 $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1)^T$,计算结果如表 1 所示。

表 1　例 1 的计算结果

迭代次数 k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	1.000 000 0	1.000 000 0	1.000 000 0	1.000 000 0	1.000 000 0
1	0.500 000 0	1.750 000 0	1.343 750 0	0.750 000 0	1.375 000 0
2	0.875 000 0	1.562 500 0	1.339 026 2	0.958 333 3	1.255 681 8
3	0.781 250 0	1.609 375 0	1.341 479 2	0.886 775 3	1.268 677 8
4	0.804 687 5	1.597 656 3	1.341 630 5	0.897 103 2	1.260 975 5
5	0.798 828 1	1.600 585 9	1.341 640 2	0.893 777 8	1.265 149 5
6	0.800 292 9	1.599 853 5	1.341 640 8	0.894 591 2	1.264 853 2
7	0.799 926 7	1.600 036 6	1.341 640 8	0.894 386 2	1.264 930 7
8	0.800 018 3	1.599 990 9	1.341 640 8	0.894 437 4	1.264 907 5
9	0.799 995 4	1.600 002 3	1.341 640 8	0.894 426 9	1.264 912 0
10	0.800 001 1	1.599 999 4	1.341 640 8	0.894 427 8	1.264 910 8
11	0.799 999 7	1.600 000 2	1.341 640 8	0.894 427 1	1.264 911 1
12	0.800 000 0	1.600 000 0	1.341 640 8	0.894 427 1	1.264 911 1

大多数的迭代法只具有局部的收敛性。也即当初值 $x^{(0)}$ 充分接近 x^* 时，点列 $\{x^{(k)}\}$ 才收敛于 x^*。算法是对不等式约束增加了松弛变量后再做的线性逼近，所以算法产生的点列 $\{y^{(k)}\}$ 的收敛性，以及点列 $\{x^{(k)}\}$ 的极限点 x^* 的可行性都与初始点的选择有关。

例 2　求解最优化问题

$$\min f(x) = (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \leqslant 0 \end{cases} \tag{12}$$

问题(12) 的准确解为 $\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2},\frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$，取初值 $x^{(0)}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，对最优化问题(12) 利用算法迭代 12 次后得结果：$x^* = (1.8, 1.4, -0.724\,314\,5)^{\mathrm{T}}$，但点 $(1.8, 1.4)^{\mathrm{T}}$ 不是问题(12) 的可行解。现取初值 $x^{(0)} = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$，利用算法计算结果如表 2 所示。

表 2　例 2 的计算结果

迭代次数 k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.000 000 000	1.000 000 000	0
1	0.833 333 333	0.916 666 666	0
2	0.822 916 667	0.927 083 333	0
3	0.823 058 528	0.911 529 264	0
4	0.822 875 668	0.911 437 881	0
5	0.822 875 655	0.911 437 827	0
6	0.822 875 655	0.911 437 827	0

在文献[8]中对问题(12)利用混合进化策略(HES)迭代计算 19 次后得结果：$(0.822\,9, 0.911\,4)^{\mathrm{T}}$

用 Matlab 软件求解问题(12)得解 $(0.822\,875\,655\,532\,296, 0.911\,437\,827\,766\,148)^{\mathrm{T}}$

从例 2 的结果可知，初始点的选择对算法的收敛性，以及极限点的可行性至关重要。实用中，常用试选法来选择初始点，即根据对问题的了解，大概估计最优解的范围，再在该范围内取不同初始点进行计算，选择最好的极限点作为最优解。

参考文献：

[1] 李泽民. 最优化的一种新途径[J]. 重庆建筑工程学院学报，1990，12(1)：49－55.

[2] 王开荣. 等式约束二次规划问题的降维算法[J]. 重庆建筑大学学报，1999，21(4)：98－101.

[3] 解可新，韩立兴，林友联. 最优化方法[M]. 天津：天津大学出版社，1997.

[4] 彭宏，冯正柱，杨立洪. 解约束优化问题的进化策略与混合进化策略的比较[J]. 数值计算与计算机应用，1998，19(3)：35－40.

[5] 朱志斌. 一般约束最优化强收敛的拟乘子－强次可行方向法[J]. 经济数学，2001，18(3)：80－87.

[6] 简金宝. 非线性不等式约束最优化快速收敛的可行信赖域算法[J]. 计算数学，2002，24(3)：273－282.

[7] 段勇，田小伟，廖鹤鸣. 约束最优化的改进中心算法[J]. 复旦学报(自然科学版)，2003，42(2)：173－177.

[8] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京：清华大学出版社，1989.

The Approximate Method of Quadratic Function With Mixed Constraint

WANG Kai-rong

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, 400030, China)

Abstract: A reduced method to solve the problem with equality constraints is given. Based on the reference we use nonlinear equality constraints, the approximate algorithm is obtained. The nonlinear programming of quadratic function with equality and unequality constraints is discussed by Wang kairong. We transform unequality constraints into equality constraints by add to relaxation variable, the quadratic programming is obtained by linear approximation, and approximate calculation is done by means of reduced method. The result of numerical calculation shows the method is feasible.

Key words: optimization; unequality constraints; linear approximation; quadratic programming

(编辑 张 苹)

(上接第 130 页)

Monte Carlo Study of N* (1440) Excitation in p(α, α′)πN Reactions

YUAN Hong-kuan[1], *CHEN Hong*[1], *PING Rong-gang*[2]

(1. Physics Department of South-west Normal University, Chongqing 400715, China;

2. Institute of High Energy Physics, Beijing 100039, China)

Abstract: We study the roper N* (1440) excitation in the p(α, α′)πN reaction and reproduce the peak position N* (1440) of resonance in the target by using Monte Carlo simulation approach . Given a definite beam energy we could simulate the momentum distributions and angular distributions of final particles. By calculating one can observe the N* (1440) resonance peak obviously in the invariant mass spectrum , also , the events distribution is dense at 2 100 MeV^2 of πN system energy square in Dalitz plots . But there are no such phenomenon in other composed systems. All of those things indicate that N * (1440) produced.

Key words: p(α, α′)πN reaction; N* (1440) model; invariant amplitudes; monte carlo simulation

(编辑 张 苹)