

文章编号:1000-582X(2004)02-0116-04

传输线方程的一种数值解法*

张希¹,刘宗行²,孙 韬³

(1. 重庆邮电学院 通信与信息工程学院,重庆 400065; 2. 重庆大学 通信工程学院,重庆 400030;
3. 重庆大学 电气工程学院,重庆 400030)

摘 要:近年来随着高速数字电子设备运行速度的不断增加,有损传输线的暂态分析受到了广泛关注。传输线方程是一阶双曲型偏微分方程组,借助于偏微分方程数值解的理论知识将传输线方程变换为一阶拟线性方程组,从而将一阶拟线性方程组的差分格式用于计算传输线方程的数值解;利用电压、电流在始端、终端上的约束关系,运用传输线的电路集中参数等效模型理论确定边界条件;最后用这种差分格式计算两种典型边界条件下的传输线暂态响应。计算结果表明该方法是一种计算传输线暂态响应的行之有效的数值计算方法。计算时间少,直接可以得出时域响应。与常用的频域分析方法相比较,该方法在计算效率上优于传统的FFT算法。

关键词:传输线方程;偏微分方程数值解;传输线暂态响应

中图分类号: O241.82; TN811

文献标识码: A

近年来高速集成电路、通讯线路中的有损传输线的暂态响应分析已得到广泛的关注。随着信号频率的增加和现代高速集成电路尺寸的减小,作为相互连接装置的传输线正在扮演着越来越重要的角色。传输线效应(反射、散射、串绕)可能导致整体电路设计的失败。因此人们对其重要性已达成了共识,并且已经提出了多种分析方法。

传输线的电路模型——传输线方程(一阶双曲型方程组)是分析传输线暂态响应的出发点。对于无损线容易得到该方程的解析解。对有损线的分析主要分为频域法、时域法两大类。在频域法中可以采用傅氏变换法^[1],根据傅氏变换先在频域中求得电压、电流的频域响应,再变换到时域得到时域解。如果网络中存在大规模的非线性设备,需要采用数值逆拉普拉斯变换(NILT)^[2]。由于频域分析方法基于叠加原理,处理非线性和具有时变特性参数问题不甚理想,因此在实际数值计算中多采用时域计算。时域中的计算方法有有限时域差分(FD-TD)法^[3]、传输矩阵法(TLM)^[4]、特征线法^[5]等。FD-TD以传输线的数学模型为基础,采用数值计算方法将其离散为一组隐式

迭代方程组,通过稳定性分析和误差分析确定时间参长和空间参长,计算得到离散的时间和空间坐标点的电量值;TLM法基于Hugens关于波的传播原理,并将连续的波按时间离散,通过研究离散波在不同的波导结构中的传播情况来获得传输特性;特征线法利用传输线的特征阻抗,绘出传输线的特征曲线,求出网格点上的电压、电流。

笔者借助于偏微分方程数值解的理论,将传输线方程变换为一阶拟线性方程组,利用一阶拟线性方程组的差分格式对传输线方程进行数值计算;利用电压、电流在始端、终端上的约束关系确定边界条件;最后迭代求解线性方程组直接得到时域解。

1 传输线方程的等效变换

将传输线方程:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i(x, t) + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u(x, t) + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

改写为

* 收稿日期:2003-10-12

作者简介:张希(1975-),男,重庆人,重庆大学硕士,从事数值计算及电路计算机辅助分析的研究。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} i \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_0} \\ \frac{1}{C_0} & 0 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} i \\ u \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{R_0}{L_0} i \\ \frac{G_0}{C_0} u \end{pmatrix} \quad (1)$$

令 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_0} \\ \frac{1}{C_0} & 0 \end{pmatrix}$

A 的两个左特征向量为

$$l_1 = \left(\frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} \quad 1 \right) \quad \text{其特征值 } \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

$$l_2 = \left(\frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} \quad -1 \right) \quad \text{其特征值 } \lambda_2 = \frac{-1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

分别用 l_1, l_2 左乘式(1), 化简得到一阶拟线性方程组^[6]。

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} \times \left(\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{\partial i}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{R_0}{\sqrt{L_0 C_0}} i - \frac{G_0}{C_0} u \\ \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} \times \left(\frac{\partial i}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{\partial i}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{R_0}{\sqrt{L_0 C_0}} i + \frac{G_0}{C_0} u \end{cases} \quad (2)$$

考虑一阶双曲型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

其特征方程

$$dx - a dt = 0$$

解为

$x - at = c$ (c 是任意常数) 称为特征线。

采用逆风格式^[7]得到式(3)的差分方程。

当 $a > 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

当 $a < 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

时间步长为 τ , 空间步长为 h 。

式(2)中令

$$\sqrt{L_0 C_0} = V_p, r = \frac{\tau}{h \sqrt{C_0 L_0}}$$

并将式(3)的两种差分格式代入式(2)得到

$$\begin{cases} \frac{V_p}{C_0} [i_j^{n+1} - i_j^n + r(i_j^n - i_{j-1}^n)] + [u_j^{n+1} - u_j^n + r(u_j^n - u_{j-1}^n)] = - \frac{R_0}{V_p} i_j^n - \frac{G_0}{C_0} u_j^n \\ \frac{V_p}{C_0} [i_j^{n+1} - i_j^n - r(i_{j+1}^n - i_j^n)] - [u_j^{n+1} - u_j^n - r(u_{j+1}^n - u_j^n)] = - \frac{R_0}{V_p} i_j^n + \frac{G_0}{C_0} u_j^n \end{cases} \quad (4)$$

$j = 1, 2, \dots, M$ (空间网格总数), $M = \frac{L}{h}$, L 为线路

总长;

$n = 1, 2, \dots, N$ (时间网格总数), $N = \frac{T}{\tau}$, T 为计算

时间。

差分格式(4)为传输线方程(1)的数值解计算格式, 它是显式迭代式。

为了保证一阶拟线性方程组的差分格式在计算中稳定, 实际计算时根据不等式(5)选择计算步长^[7]。

$$\lambda < \frac{1}{\max |\lambda_i|} \quad (5)$$

其中

$$\lambda = \frac{\tau}{h}$$

λ_i 为式(1)中 A 的特征值 $\pm \frac{1}{\sqrt{C_0 L_0}}$

考虑到 $r = \frac{\tau}{h \sqrt{C_0 L_0}}$, 推出

$$r = \frac{\tau}{h \sqrt{C_0 L_0}} < 1 \quad (6)$$

式(6)是传输线方程差分格式(4)的稳定条件。计算时应在满足稳定条件的基础上选择时间、空间步长。

2 确定边界条件

均匀传输线的集中参数电路模型如图 1 所示。

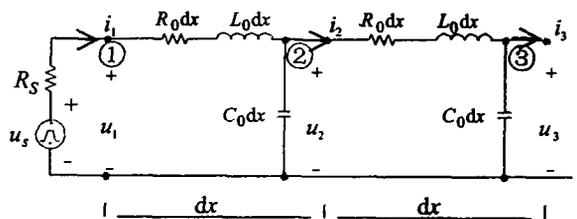


图 1 始端传输线集中参数电路模型

根据 Kirchhoff 电压定律有^[8]

$$u_s(t) = (R_s + R_0 dx) i_1(t) + L_0 dx \frac{di_1}{dt} + u_2(t) \quad (7)$$

$$u_1(t) = u_s(t) - R_s i_1(t) \quad (8)$$

令时间步长 $dt = \tau$, 空间步长 $dh = h$ 。

在节点①处, 将式(7)中的 $\frac{di_1}{dt}$ 采用前向差分

$$\frac{di_1}{dt} \approx \frac{i_1^{n+1} - i_1^n}{\tau}$$

得到

$$u_s(n) = (R_s + R_0 h) i_1^n + L_0 h \frac{i_1^{n+1} - i_1^n}{\tau} + u_2^n$$

推出

$$i_1^{n+1} = \frac{\tau}{hL_0} [u_s(n) - u_2^n - (R_s + hR_0 - \frac{hL_0}{\tau}) i_1^n] \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)

得到节点①处的电压表达式

$$u_1^{n+1} = u_s(n+1) - R_s i_1^{n+1} \quad (10)$$

式(9)、(10)即是始端节点①处的边界条件。

对于不同的负载, 终端边界条件是不同的。文中将在算例中对所出现的边界情况进行讨论。

3 算例

例1: 无损传输线终端接电感。电路如图2所示。首端电压 $U_s = 30\varepsilon(t)$, $R_0 = G_0 = 0$, $L_0 = 250 \text{ nH/m}$, $C_0 = 100 \text{ pF/m}$, 线长 400 m 。求在电感值分别为 1 mH 、 5 mH 、 50 mH 时终端电压零状态响应(计算时间 $20 \mu\text{s}$)。



图2 终端接电感的传输线系统

根据集中参数电路模型(图3), 含终端电感回路的KVL方程

$$u_{l-1} = R_0 dx i_{l-1} + L_0 dx \frac{di_{l-1}}{dt} + u_l$$

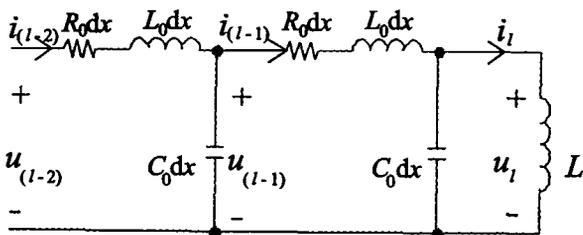


图3 以电感为负载的传输线集中参数电路

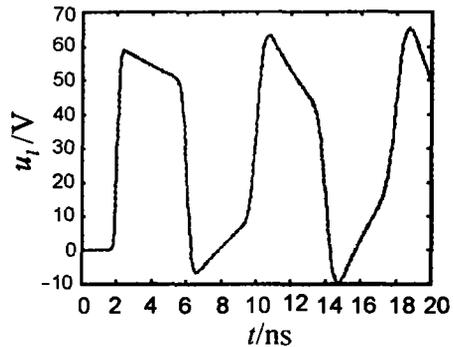
对上式中采用前向欧拉公式得

$$u_{l-1}^{n+1} \approx R_0 h i_{l-1}^{n+1} + L_0 h \frac{i_{l-1}^{n+1} - i_{l-1}^n}{\tau} + L \frac{i_{l-1}^{n+1} - i_{l-1}^n}{\tau}$$

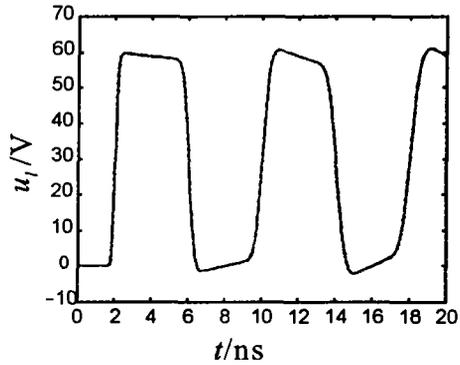
电感为负载的边界条件:

$$\begin{cases} i_l^{n+1} = \frac{\tau}{L} u_{l-1}^n + i_l^n - \frac{L_0 h}{L} [i_{l-1}^{n+1} - i_{l-1}^n] \\ u_l^{n+1} = L \frac{i_l^{n+1} - i_l^n}{\tau} \end{cases}$$

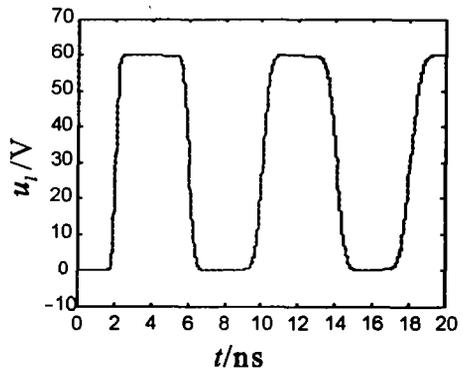
采用时间步长 $0.01 \times 10^{-6} \text{ s}$ 、空间步长 4 m (稳定条件: $r = 0.5 < 1$) 进行计算。3个不同电感值时终端电压波形如图4所示。



(a) $L_0 = 1 \text{ mH}$



(b) $L_0 = 5 \text{ mH}$



(c) $L_0 = 50 \text{ mH}$

图4 不同电感负载下的终端电压波形

例2:有损传输线及其电源波形如图5所示。线长0.3 m, $R_0 = 8.24 \Omega/\text{cm}$, $G_0 = 0 \text{ nS/m}$, $L_0 = 309 \text{ nH/m}$, $C_0 = 144 \text{ pF/m}$, $R_i = 50 \Omega$, $R_l = 50 \Omega$ 。求终端电压零状态响应。

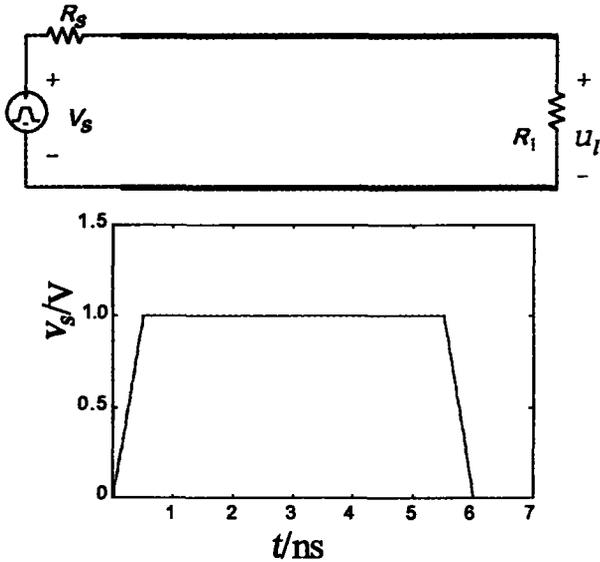


图5 有损传输线系统

根据集中参数电路模型(图6),应用含终端电阻回路的KVL方程及后向欧拉格式离散 $\frac{di}{dt}$ 。终端电压的边界条件

$$u_i^{n+1} \approx u_{i-1}^{n+1} - \frac{L_0 h}{\tau} [i_{i-1}^{n+1} - i_{i-1}^n] - R_0 h i_{i-1}^{n+1}$$

电阻上的电压、电流关系: $u = iR_L$

所以在终端处的电流的边界条件

$$i_i^{n+1} = u_i^{n+1}/R_L$$

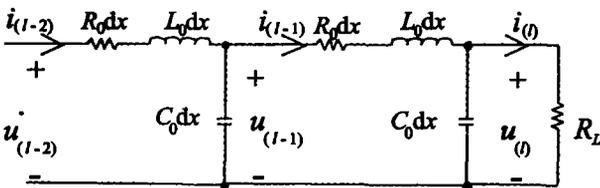


图6 以电阻为负载的传输线集中参数电路

选择时间步长 $1 \times 10^{-12} \text{ s}$ 、空间步长 0.002 m (稳定性条件: $r = 0.7496$) 进行计算。计算结果如图7所示。首端电压行波经过 1.5 ns 到达末端,幅值衰减为 0.5 V 。

4 结论

对于一阶双曲型的传输线方程,本文引入了一阶

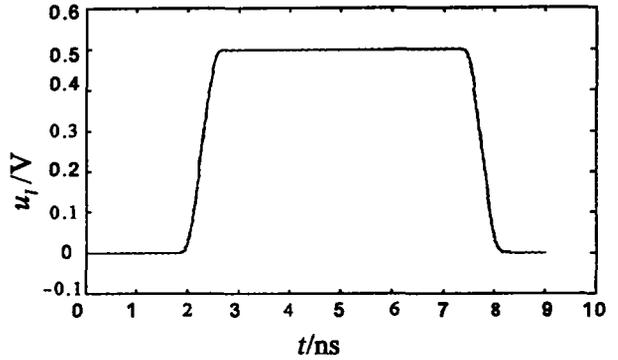


图7 终端电压响应曲线

拟线性方程组差分格式计算其暂态响应。算例的计算结果表明用这种数值计算方法得到的结果同现有其他方法计算的结果相同,因此该方法是正确、可行的。与目前常用的FD-TD相比它是显式计算方法,仍具有编程易、计算速度快,可以直接得出时域数值解的优点;并能够计算零(非零)初始值、具有线性(非线性)负载的均匀(非均匀)传输线的暂态响应。

参考文献:

- [1] MAO J F, LI Z F. Analysis of the time response of nonuniform multiconductor transmission line with a equivalent cascaded network chain [J]. IEEE Trans MTT, 1992, 40: 948 - 954.
- [2] GRIFFITH R, NAKHAL M. Mixed frequency /time domain analysis of nonlinear circuits[J]. IEEE Trans Computer Aided Design, 1992, 11: 1 032 - 1 043.
- [3] PAUL C R. Incorporation of terminal constraints in the FDTD Analysis of Transmission line[J]. IEEE Trans on Electronic compatibility, 1994, 36(2): 85 - 91.
- [4] RENATO DE PADUA MOREIRA. Direct Synthesis of Microwave Filters Using Inverse Scattering Transmission - Line Matrix Method [J]. IEEE Trans MTT, 2000, 48 (12): 2 271 - 2 283.
- [5] 毛军发,李征帆. 非均匀传输线综合的特征法[J]. 电子学报, 1996, 25: 22 - 25.
- [6] 李荣华,冯果忱. 微分方程数值解法[M]. 北京:人民教育出版社,1980.
- [7] 陆金甫,关治. 偏微分方程数值解法[M]. 北京:清华大学出版社,1987.
- [8] 江泽佳. 电路原理[M]. 第三版. 北京:高等教育出版社,1979.

(下转第131页)

Preparation Technology of Ultrafine Powder of Active Fly - ash

FANG Rong-li, YANG Yong-fu

(College of Materials Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

Abstract: Calcining at high temperature and controlling the crystal change of C_2S were adopted to activate flyash and to prepare ultrafine powders of flyash. Mineral compositions of flyash and activated flyash have been mensurated. The main compositions of flyash are mullite ($3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$) and quartz (SiO_2), and the activated flyash's are di-calcium silicate (C_2S) and $C_{12}A_7$. The main factors such as the ratio of calcium and silicate, the calcination temperature, calcination time and the cooling mode of sample influencing the crystal change of C_2S have been studied, and the best process parameters that propitious to the crystal change of C_2S have been found out. Disturbing factors of crystal change of C_2S are eliminated effectively and the complete self-pulverization of fly-ash sinter is realized, and the average diameter of powers is less than $1.0 \mu m$.

Key words: fly-ash; crystal change; self-pulverization

(编辑 姚飞)

(上接第119页)

A Numerical Method for Transmission Line Equations

ZHANG Xi¹, LIU Zong-hang², SUN Tao³

(1. College of Communication and Information Engineering, Chongqing Post and Telecommunication Academy, Chongqing 400065, China;

2. College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

3. College of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Transient analysis of transmission line has recently been received more attention because operating speeds in high-speed digital electronics are increasing. Transmission line equations are hyperbolic partial differential equations, firstly this paper deduces how to change transmission line equations into quasilinear differential equations, thus the transmission line equation numerical result is gotten by computing the differential formation of quasilinear differential equations. The constraint of voltage and current is be considered and lumped equivalent circuit mode at boundary network collaborated at the same time in finding boundary conditions. Finally the paper computes transient response of transmission line with two typical boundary conditions. Numerical result shows that this approach is an effective way. It is explicit algorithm with less CPU consumption which can get time field response directly. The agree-upon effective way does be frequency field method, however it could not get time response unless the numerical inverse laplace transformation (NILT) be introduced. Thus this approach is more effective than FFT algorithm.

Key words: transmission line equations; numerical solution of partial differential equations; transient response of transmission line

(编辑 李胜春)