文章编号:1000 - 582X(2004)05 - 0048 - 03

# 完备度量空间与线性赋范空间中的不动点*

杨 理 平
(广东工业大学 应用数学系,广东 广州　510090)

**摘　要**:利用实函数性质,讨论了两个不同度量空间中两个映象乘积的不动点问题,推广了 Fisher 的主要结果,并给了出逼近不动点的敛速估计;同时,在弱拓扑的意义下,利用分析的方法,讨论了赋范空间中有关映象不动点的存在性,得到一个新的不动点定理。

**关键词**:完备度量空间;线性赋范空间;弱列紧集;弱闭集;不动点;收敛率估计
**中图分类号**:O177.91　　**文献标识码**:A

Fisher[1]在两个不同的完备度量空间中,讨论了有关映象的不动点问题。Kada[2]等人在度量空间中引入了 $w$ - 距离,讨论了在 $w$ - 距离下有关映象不动点的存在性。进一步,文献[3]在完备度量空间和紧空间中引入了 $w$ - 距离,得到了两个新的不动点定理,从而推广了 Knanna[4],Jeng - Sheok U[5]及 Kada 的主要结果。

笔者利用实函数的性质,在两个完备度量空间中,讨论有关映象的不动点问题,推广了 Fisher 的主要结果,且给出了一个收敛速度估计;同时,在弱拓扑的意义下,讨论了赋范空间中与弱列紧的弱闭集有关的映象的不动点问题,得到一个新的不动点定理。为此,引入下面的记号和引理。

## 1　记号和引理

文中,设 $R_+ = [0,\infty)$,$H$ 表示实函数 $h:R_+^4 \to R_+$ 的集合,且满足:对所有的 $u_n \geq 0, v_n \geq 0$,无论(i) $u_n \leq h(v_n,v_n,0,u_n)$ 或 $u_n \leq (h(u_n,0,u_n,0)$,均存在 $c_n \geq 0$,使得 $u_n \leq c_n v_n$ 成立,且 $0 \leq G_n = (\prod_{j=1}^{n} c_j)^{\frac{1}{n}} \leq G < 1, n \in N$(自然数集)。

**引理 1**　设 $(X,d)$,$(Y,\rho)$ 为度量空间,映象 $T:X \to Y, S:Y \to X$,对 $\forall x \in X, y \in Y$ 有

$$\rho(Tx,TSy) \leq h(d(x,Sy),d(x,STx),\rho(y,Tx),\rho(y,TSy)) \tag{1}$$

$$d(Sy,STx) \leq f(\rho(y,Tx),\rho(y,TSy),d(x,Sy),d(x,STx)) \tag{2}$$

其中 $f,h \in H$,则对每个 $x \in X$,序列 $\{x_n\} = \{ST)^n x\}$,$\{y_n\} = \{T(ST)^{n-1}x\}$ 都是 Cauchy 列。

**证**　令 $c_n = \max\{a_n, b_n\}$,其中 $a_n, b_n$ 分别为对于 $h,f$ 的实数且满足条件(i)。由不等式(1)并利用 $h \in H$ 有

$$\rho(y_n,y_{n+1}) = \rho(Tx_{n-1},TSy_n) \leq h(d(x_{n-1},Sy_n), d(x_{n-1},STx_{n-1}),\rho(y_n,Tx_{n-1}),\rho(y_n,TSy_n)) = h(d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},x_n),0,\rho(y_n,y_{n+1}))$$

即有

$$\rho(y_n,y_{n+1}) \leq c_n d(x_{n-1},x_n) \tag{3}$$

类似地,由不等式(2)及 $f \in H$ 可证

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq c_n \rho(y_n,y_{n+1}) \tag{4}$$

所以由式(3)、(4)有　$d(x_n,x_{n+1}) \leq c_n^2 d(x_{n-1},x_n)$

利用数学归纳法,可推得

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq (\prod_{j=1}^{n} c_n)^2 d(x,x_1) \leq G^{2n} d(x,x_1) \tag{5}$$

$$\rho(y_n,y_{n+1}) \leq G^{2n-1} d(x,x_1) \tag{6}$$

由式(5),若 $n < m$,则

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m) \leq (G^{2n} + G^{2(n+1)} + \cdots + G^{2(m-1)} d(x,x_1) \leq$$

* 收稿日期:2003 - 12 - 10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10171097)
作者简介:杨理平(1964 - ),男,湖南靖州人,广东工业大学讲师,硕士,主要研究方向为最优化理论与算法。

$$\frac{G^{2n}}{1-G^2}d(x,x_1) \tag{7}$$

因 $0<G<1$，所以当 $n\to\infty$ 时，$d(x_n,x_m)\to 0$，此即可说明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。

类似地，利用式(6)可证 $\{y_n\}$ 也是 Cauchy 列。

**引理 2**[6]　设 $X$ 为线性赋范空间，$X$ 上连续线性泛函的全体记为 $X^*$。$x_0\in X, x_0\neq 0$，则存在 $f\in X^*$ 使得 $\|f\|=1, f(x_0)=\|x_0\|$。

文献[7]在 Banach 空间框架下，证明了引理 3、引理 4 的结论，而文献[6]把这些结论推广到了一般的赋范空间，详细的证明可参阅文献[6]。

**引理 3**　设线性赋范空间 $X$ 上的线性泛函数为 $f(x)=\|x\|$，则 $f(x)$ 在 $X$ 上是弱下半连续的，即若 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则必有 $\|x_0\|\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\|x_n\|$。

**引理 4**　设 $K$ 是线性赋范空间 $X$ 中的弱列紧的弱闭集，$g:K\to R_+$ 是弱下半连续的，则 $g$ 在 $K$ 上必有下界，且存在 $x_0\in K$，使 $g(x_0)=\inf\limits_{x\in K}g(x)$。

## 2　主要结果

**定理 1**　设 $(X,d)$，$(Y,\rho)$ 为完备度量空间，映象 $T:X\to Y, S:Y\to X, f,h\in H$ 满足式(1)、(2)，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是按引理 1 所定义的序列。且对 $\forall u\in X, u\neq STu$，有

$$\inf\{d(x,u)+d(x,STx):x\in X\}>0$$

对 $\forall v\in Y, v\neq TSv$，有

$$\inf\{\rho(y,v)+\rho(y,TSy):y\in Y\}>0$$

则　1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=z, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=\omega$

2) $d(x_n,z)\leqslant\dfrac{G^{2n}}{1-G^2}\cdot d(x,x_1)$，$\rho(y_n,\omega)\leqslant\dfrac{G^{2n-1}}{1-G^2}\cdot d(x,x_1)$

3) $ST$，$TS$ 分别有唯一不动点 $z,\omega$

**证**　由引理 1 知，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都是 Cauchy 列，又因 $X,Y$ 是完备的，故分别存在 $z\in X,\omega\in Y$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=z$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\omega$，而由 $d(\cdot,\cdot)$ 的连续性及式(7)，有

$$d(x_n,z)=\lim_{m\to\infty}d(x_n,x_m)\leqslant\frac{G^{2n}}{1-G^2}\cdot d(x,x_1) \tag{8}$$

类似地，可证 $\rho(y_n,\omega)\leqslant\dfrac{G^{2n-1}}{1-G^2}\cdot d(x,x_1)$

现证 3)，假设 $z\neq STz$，则由定理 1 之假设及式(5)、(8)有

$$\begin{aligned}&0<\inf\{d(x,z)+d(x,STx):x\in X\}\leqslant\\&\inf\{d(x_n,z)+d(x_n,STx_n):n\in N\}\leqslant\\&(1+\frac{1}{1-G^2})d(x,x_1)\inf\{G^{2n}:n\in N\}=0\end{aligned}$$

矛盾。所以应有 $z=STz$，即 $z$ 是 $ST$ 的不动点。同理可证 $\omega$ 是 $TS$ 的不动点。

为证唯一性，设 $z=STz, z'=STz'$，利用式(2)有

$$\begin{aligned}d(z,z')&=d((ST)^nz,(ST)^nz')=\\&d(S(T(ST)^{n-1}z),ST((ST)^{n-1}z'))\leqslant\\&f(\rho(T(ST)^{n-1}z,T(ST)^{n-1}z'),\\&\rho(T(ST)^{n-1}z,TST(ST)^{n-1}z),\\&d((ST)^{n-1}z',ST(ST)^{n-1}z),\\&d((ST)^{n-1}z',ST(ST)^{n-1}z'))=\\&f(\rho(T(ST)^{n-1}z,T(ST)^{n-1}z'),0,\\&d((ST)^n,(ST)^nz'),0)\end{aligned}$$

由 $f\in H$ 有

$$d(z,z')\leqslant c_n\rho(T(ST)^{n-1}z,T(ST)^{n-1}z') \tag{9}$$

利用式(1)有

$$\begin{aligned}&\rho(T(ST)^{n-1}z,T(ST)^{n-1}z')=\\&\rho(T(ST)^{n-1}z,TS(T(ST)^{n-2}z'))\leqslant\\&h(d((ST)^{n-1}z,ST(ST)^{n-2}z'),\\&d((ST)^{n-1}z,ST(ST)^{n-1}z),\\&\rho(T(ST)^{n-2}z',T(ST)^{n-1}z),\\&\rho(T(ST)^{n-2}z',TST(ST)^{n-2}z')=\\&h(d((ST)^{n-1}z,(ST)^{n-1}z'),0,\\&\rho(T(ST)^{n-1}z,T(ST)^{n-1}z'),0)\end{aligned}$$

由 $h\in H$ 有

$$\rho(T(ST)^{n-1}z,T(ST)^{n-1}z'\leqslant c_nd((ST)^{n-1}z,(ST)^{n-1}z') \tag{10}$$

结合式(9)、(10)有

$$\begin{aligned}d(z,z')&=d((ST)^nz,(ST)^nz)\leqslant\\&c_n^2d((ST)^{n-1}z,(ST)^{n-1}z')\end{aligned}$$

利用数学归纳法，由上式可推得

$$d(z,z')\leqslant(\prod_{j=1}^{n}c_j)^2d(z,z')\leqslant G^{2n}d(z,z')$$

而 $0<G<1$，故必有 $d(z,z')=0$，即 $z'=z$。因此 $ST$ 的不动点是唯一的。类似地，可证 $TS$ 的不动点也是唯一的。

**注**　令 $f(u,v,\lambda,\omega)=c\max\{u,\lambda,\omega\}$，$h(u,v,\lambda,\omega)=c\max\{u,\lambda,\omega\}$，$0\leqslant c\leqslant 1$，即得文献[1]中的定理 1，故本定理是文献[1]中定理 1 的推广，同时不要求每个 $c_n$ 都小于 1，即有的 $c_n$ 可以大于 1，而只要求所有 $c_n$ 的积小于 1 即可。

当 $(X,d)=(Y,\rho)$，$S=T$ 时，由定理 1 可得如下推论：

**推论 1**　设 $(X,d)$ 为完备度量空间，$T$ 为 $X$ 上的自映象，对 $\forall x,y\in X$ 有

$$\begin{aligned}d(Tx,T^2y)\leqslant h(&d(x,Ty),d(x,T^2x),\\&d(y,Tx),d(y,T^2y))\end{aligned}$$

其中 $h\in H$，则 $T$ 有唯一不动点。

现讨论线性赋范空间中的不动点问题。为此设 $H^*$ 为满足如下条件的所有函数 $f:R_+^4\to R_+^4$：对所有的 $u,v\geqslant 0$，若 $u<f(v,v,0,u)$ 或 $u<f(v,0,u,0)$，则 $u<v$。

**定理2** 设$(X,d)$,$(Y,\rho)$是线性赋范空间,$K,D$分别是$X,Y$中弱列紧的弱闭集。映象$T:K\to D,S:D\to K$,满足:对$\forall x\in K,y\in D,x\neq Sy$有

$$\rho(Tx,TSy)<h(d(x,Sy),d(x,STx),\rho(y,Tx),\rho(y,TSy))\qquad(11)$$

而当$y\neq Tx$时有

$$d(Sy,STx)<f(\rho(y,Tx),\rho(y,TSy),d(x,Sy),d(x,STx))\qquad(12)$$

其中$f,h\in H^*$,则$ST$有唯一不动点$z\in K$,$TS$有唯不动点$\omega\in D$,且$Tz=\omega,S\omega=z$。

**证** 令$\varphi(x)=d(x,STx)=\|x-STx\|$,则由引理3知$\varphi:K\to R_+$是弱下半连续的,由引理4知,存在一点$u\in K$,使

$$\varphi(u)=d(u,STu)=\min\{d(x,STx):x\in K\}$$

若$Tu\neq TSTu$,则$u\neq STu$,由式(12)有

$$d(STu,STSTu)<f(\rho(Tu,TSTu),\rho(Tu,TSTu),0,d(STu,STSTu))$$

因$f\in H^*$故有

$$d(STu,STSTu)<\rho(Tu,TSTu)\qquad(13)$$

又因$u\neq STu$,由式(11)有

$$\rho(Tu,TSTu)<h(d(u,STu),d(u,STu),0,\rho(Tu,TSTu))$$

因$h\in H^*$故有

$$\rho(Tu,TSTu)<d(u,STu)\qquad(14)$$

由式(13)、(14)可推得$\varphi(STu)=d(STu,STSTu)<d(u,STu)=\varphi(u)$,矛盾。因此$Tu=TSTu$。为此设$Tu=\omega,S\omega=z$,则有$ST(STu)=S(TSTu)=STu=S\omega=z,\omega=Tu=TS(Tu)=T(STu)=Tz$,因此,$S\omega=z$为$ST$的一个不动点,$Tz=\omega$为$TS$的一个不动点。

现证唯一性。设$ST$有另一不动点$z'$,应有$Tz\neq Tz'$,由式(12)有

$$d(z,z')=d(STz,STz')<f(\rho Tz,Tz'),0,d(z,z'),0)$$

因$f\in H^*$,所以有

$$d(z,z')<\rho(Tz,Tz')\qquad(15)$$

由式(11)有

$$\rho(Tz,Tz')=\rho(Tz,TSTz')<h(d(z,z'),0,\rho(Tz,Tz'),0)$$

因$h\in H^*$所以有

$$\rho(Tz,Tz')<d(z,z')\qquad(16)$$

由式(15)、(16)得

$$d(z,z')<\rho(Tz,Tz')<d(z,z')$$

矛盾。因此不动点$z$是唯一的。类似地,可证$\omega$是$TS$的唯一不动点。

**推论2** 设$(X,d)$是线性赋范空间,$K$是$X$中弱列紧的弱闭集,映象$T:K\to K$满足:对$\forall x,y\in K,x\neq Ty$有

$$d(Tx,T^2y)<f(d(x,Ty),d(x,T^2x),d(y,Tx),d(y,T^2y))$$

其中$f\in H^*$,则$T$有唯一不动点。

**参考文献:**


[1] FISHOR B. Fixed point on two metric space[J]. Glasnic Matematicki,1981,16(36):333-337.

[2] KADA,SUZUKI O,TAKAHASHI T,W. Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric space[J]. Math Japonica,1996,44:381-391.

[3] 朱顺荣. 完备度量空间与紧度量空间上的不动点定理[J]. 南京大学学报,2001,37(1):12-16.

[4] KANNAN R. Some results on fixed points[J]. Amer Math Month,1969,76:405-408.

[5] JOENG-SHEOK U. Fixed point theorems related to Crics contraction principle[J]. J Mate Anal Appl,1998,225:630-640.

[6] 刘培德. 泛函分析基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2001.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社,1985.


# Fixed Points on Complete Metric Spaces and Normed Linear Spaces


*YANG Li-ping*

(Department of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)



**Abstract**: By properties of a real function, fixed points problem on two complete metric spaces are discussed. The result generalizes corresponding result of Fisher. Moreover, this result provides a general convergence rate estimate. Meanwhile, we discuss the existence of fixed point on two normed linear spaces under the condition of weak topology, and we obtain a new fixed point theorem.



**Key words**: complete metric space; normed linear space; weakly compact set; weskly closed set; fixed point; convergence rate estimate.

(编辑 张 苹)