2004 年 7 月　　重 庆 大 学 学 报　　Jul. 2004
第 27 卷第 7 期　　Journal of Chongqing University　　Vol. 27 No. 7

文章编号:1000 - 582X(2004)07 - 0102 - 03

基于 Black-scholes 公式下美式期权价格的计算*

蒲 兴 成[1,2],郑 继 明[2],游 晓 黔[2]

(1. 重庆大学 自动化学院,重庆 400030;2. 重庆邮电学院 计算机学院,重庆 400065)

摘　要:基于期权定价的基本理论,研究美式看涨期权与欧式看涨期权之间的关系;在 Black - Scholes 公式假设条件下,利用鞅和停时理论,得美式看涨期权的价格与欧式看涨期权的价格相等;探讨美式看跌期权价格的数字化计算,在相关假设条件下,利用基于最优化时的变分不等式证明了美式看跌期权价格的有界性,并介绍了几种美式看跌期权价格的数字化计算方法。

关键词:美式看涨期权;美式看跌期权;数字化计算

中图分类号:F224.111　　**文献标识码**:A

近年来,在期权定价方面,特别是欧式期权定价方面,已有比较完善的理论和方法,文献[1]利用随机微分方程和无风险投资理论得到了著名的关于欧式期权价格的 Black-Scholes 公式,文献[2]对 Black 和 Scholes 的工作加以推广,得到了一些与 Black-Scholes 公式相关的结论,文献[3]应用无套利资本资产定价及公式,详细讨论具有随机寿命的二维期权定价,并得到相应的定价公式,文献[4]应用随机微分对策方法,研究与标的资产有关的欧式期权套期保值策略问题,并给出具有鲁棒控制的期权套期保值策略。笔者在 Black-scholes 公式固有假设条件下,讨论美式看涨期权价格与欧式看涨期权价格之间的关系;并介绍几种美式看跌期权价格的计算方法。

1　问题描述及引理

一个美式期权价格通常定义为一个非负的适应过程$(h_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$。为简单起见,仅仅研究形如 $h_t = \Psi(S_t)$ 的过程,此处 Ψ 是一个从 R^+ 到 R^+ 的连续函数,满足:对 $\forall x \in R^+$ 有 $\Psi(x) \leqslant A + Bx$,A,B 是非负的常数。对美式看涨期权来说,$\Psi(x) = (x-K)^+$,对美式看跌期权:$\Psi(x) = (K-x)^+$。用 $h_t = \Psi(S_t)$ 来表示数量为 $\Phi = ((H_t^0, H_t))_{0\leqslant t\leqslant T}$ 美式期权的交易策略,记 $V_t(\Phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$,即有:对 $\forall t \in [0,T]$,有 $V_t(\Phi) \geqslant \Psi(S_t)$,a.s. 用 Φ^{Ψ} 表示价格为 $h_t = \Psi(S_t)$ 的美式期权的交易策略集。如果期权的拥有者按照策略 $\Phi \in \Phi^{\Psi}$,则他在任何时刻 t 拥有的财产最小为 $\Psi(S_t)$ 这是在时刻 t 执行期权时的恰好支付。下面的引理阐述了美式期权套期交易的最小价原理。

引理 1　记 u 为一个定义在$[0,T]\times R^+$ 上取值于 R 的函数:

$$u(t,x) = \sup_{\Gamma\in\Gamma_{t,T}} E*[e^{-r(\Gamma-t)}\Psi(x\exp(r-(\sigma^2/2))\cdot(T-t)+\sigma(W\Gamma-W_t))]$$

此处 $\Gamma_{t,T}$ 表示取值于$[0,T]$ 的停时集,这样存在一个交易策略 $\widetilde{\Phi} \in \Phi^{\Psi}$ 满足:对所有 $t \in [0,T]$,$V_t(\widetilde{\Phi}) = u(t,S_t)$,此外对任何一个策略 $\Phi \in \Phi^{\Psi}$ 有:$V_t(\Phi) \geqslant u(t,S_t)$,$t \in [0,T]$.

引理 2[6]　(基于变分不等式的最优停止定理):若存在一个函数 $\phi: V \to R$ 满足:

(a)$\phi \in C^1(V) \cap C(\bar{V})$;(b) 在 V 上 $\phi \geqslant g$,在 ∂V 上 $\phi = g$;(c)$D = \{x \in V;\phi(x) > g(x)\}$,对所有 $y \in V$ 有 $E^y[\int_0^T \chi_{\partial D}(Y_t)dt] = 0$;(d) 在 ∂D 上对任意函数 h: $R^{n-1} \to R$,存在 $0 < M < \infty$ 使得对所有 x,y 有 $|h(x) - h(y)| \leqslant M|x-y|$;(e)$\phi \in C^2(V\backslash\partial D)$ 且在 ∂D 附近 ϕ 的二阶导数是局部有界的.(f) 在 $V\backslash\bar{D}$ 上 $L_\phi + f \leqslant 0$;(g) 在 D 上 $L\phi + f = 0$;(h) 对所有 $y \in V$,τ_D: $= \inf\{t > 0; Y_t \notin D\} < \infty$ a.s. R^y 且(i) 对所有 $y \in V$,函数族 $\{\phi(Y_\tau);\tau \leqslant \tau_D\}$ 是一致可积的 w.r.t. R^y,则 $\phi(y) = \Phi(y) = \sup_{\tau\leqslant T}[\int_0^\tau f(Y_t)dt + g(Y_\tau)]$;$y \in V$ 且 $\tau^* = \tau_D$ 是该问题的一个最优停时。

说明:引理 2 表明只要找到符合条件的函数 ϕ 和

* 收稿日期:2004 - 03 - 25
基金项目:重庆邮电学院青年教师基金(A2003 - 07)资助项目
作者简介:蒲兴成(1973 -),男,湖南洞口人,重庆邮电学院讲师,重庆大学博士研究生,研究方向为金融工程及随机控制。

相应的区间 D,则停时问题

$$\phi(y) = \Phi(y) = \sup_{\tau \le T}\left[\int_0^{\tau} f(Y_t)\,dt + g(Y_\tau)\right];y \in V$$

也就解决了,而函数 ϕ 的寻找一般凭经验和直觉在特定问题中是容易找到的。

2 美式看涨期权价格与欧式看涨期权价格之间的关系定理

定理 1 在 Black-Scholes 公式假设条件[7] 下,美式看涨期权与欧式看涨期权的价格相等。

即若 $F(t,x) = xN(d_1) - Ke^{-r\theta}N(d_2)$, $d_1 = \dfrac{\log(x/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, $N(d) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$,对所有实数 x 定义 $\Psi(x) = (x - K)^+$,则有 $u(t,x) = F(t,x)$.

证明:假设 $t = 0$(在 $t > 0$ 时证明类似),则对任何停时 τ 有:

$$E*[e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+] \le E*[e^{-rT}(S_T6 - K)] = E*(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)^+ \quad (1)$$

另一方面,因为 $(\tilde{S}_t)$ 是一个在 $P*$ 下的鞅,从而:

$$E*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)^+ | F_\tau] \ge E*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K) | F_\tau] = \tilde{S}_\tau - e^{-rT}K$$

所以 $E*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)^+ | F_\tau] \ge \tilde{S}_\tau - e^{-rT}K$,又 $r > 0$ 且左边是一个非负量,故 $E*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)^+ | F_\tau] \ge [\tilde{S}_\tau - e^{-rT}K]^+$,两边取数学期望有 $E^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)^+ | F_\tau] \ge E*[\tilde{s}_\tau - e^{-rT}K)^+ | F_\tau]$;再根据引理 1 知结论成立。

说明 2:由 Black-Scholes 公式即知 $F(t,x)$ 是相应的欧式看涨期权价格,从上面的证明就得美式看涨期权的价格与欧式看涨期权的价格相等,对美式看跌期权来说,这种关系并不成立,且函数 u 一般来说不存在闭形式解。在此情况下,计算美式看跌期权只能采用数字方法。

3 美式看跌期权价格的上限

以 S_t 表示股票在时刻 t 的价格,服从如下随机微分方程:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t, S_0 = x \quad (2)$$

其中 B_t 为一维标准布朗运动,r,σ 为书籍的正常数,K 表示美式看跌期权的交割价格,则在 t 时刻美式看跌期权价格的现值为 $p = E\{\max[e^{-\rho t}(K - S_t, 0)\}$,$\rho$ 为无风险投资收益率,由方程(2) 及伊藤引理易得 $S_t = xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}$,为简单起见,令 $\rho = r$,则 $p = E[Ke^{-rt} - xe^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma B_t}, 0)^+]$ 且 $K - S_t \ge 0$. 以 τ 表示美式看跌期权的执行时刻,由 τ 的任意性,即知 τ 为到期时刻之前的一个随机变量,下面的定理 2 说明了美式看跌期权价格的有界性。

定理 2 若 $u^\infty(x) = \sup_{\tau \in \Gamma_{0,\infty}} E\{\max[e^{-r\tau}(K - S_\tau), 0]_{\{\tau<\infty\}}\}$,则 $u^\infty(x) = \begin{cases} K - x, x \le x_0 \\ (K - x_0)\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{-m}, x > x_0 \end{cases}$

其中 $x_0 = Km/(1+m)$, $m = 2r/\sigma^2$.

证明:取 $\phi(z) = \begin{cases} \max\{K - x, 0\}, x \le z \\ (K - z)\left(\dfrac{z}{x}\right)^m, z \in [0,x] \cap [0,K], \text{其中 } m = \dfrac{2r}{\sigma^2} \text{ 令} \\ 0, z \in [0,x] \cap [K, +\infty) \end{cases}$

$f(S_\tau) \equiv 0$, $g(S_\tau) = e^{-r\tau}(K - S_\tau)$,容易验证 $\phi(z)$ 满足引理 2 的条件,所以 $\phi(z) = u^\infty(z)$,又 $\phi'(z) = \dfrac{z^{m-1}}{x^m}[Km - (m+1)z]$,故当

(i) $z \le \dfrac{Km}{m+1}$ 时,$\max_z \phi(z) = K - x$;

(ii) $z > \dfrac{Km}{m+1}$ 时,$\max_z \phi(z) = \phi\left(\dfrac{Km}{m+1}\right)$. 取 $x_0 = Km/(1+m)$ 即知结论成立.

说明 3:由定理 2 可知,尽管美式看跌期权的交易时间不确定,但美式看跌期权的价格仍然存在一个上限,这也是确定美式期权的一个依据. 与文献[5] 不同的是,定理 2 的证明利用基于变分不等式的最优停止定理直接证明,从而大大简化了证明过程。

4 美式期权价格的计算

4.1 美式看涨期权价格的计算

在 Black-scholes 模型中,已得出欧式看涨期权价格的确切计算公式,而由定理 1 在相同假设条件下欧式看涨期权的价格与美式看涨期权的价格相等. 故可直接引用欧式看涨期权价格的计算公式来代替美式看涨期权的价格计算.

4.2 美式看跌期权价格的数字化计算

4.2.1 美式看跌期权的二项计算方法

Cox-Ross-Rubinstein 模型几个结论:

(i) 就离散型美式看跌期权来说,在时刻 n 的美式看跌期权的价格可写成 $p_n = P_{am}(n, S_n)$,到期时刻为 N,交割价格为 K. 此处 $P_{am}(N,x) = (K - x)^+$,当 $n \le N - 1$ 时

$$P_{am}(n,x) = \max[(K - x)^+, f(n+1,x)/(1+r)]$$

且 $f(n+1,x) = pP_{am}(n+1, x(1+a)) + (1-p)P_{am}(n+1, x(1+b))$, $p = \dfrac{b - r}{b - a}$

(ii) 函数 $P_{am}(0,.)$ 可以写成 $P_{am}(0,x) = \sup_{v \in \Gamma_{0,N}} E*((1+r)^{-v}(K - xV_v)^+)$,随机变量序列

$(V_n)_{0 \le n \le N}$ 定义为 $V_0 = 1, V_n = \Pi_{i=1}^{n} U_i (n \geq 1)$，$U_i$ 是在概率 P^* 下的随机变量。记 r, a, b 是三个实数，满足 $-1 < a < r < b$。记 $(S_n)_{n \geq 0}$ 是一个二项模型：$S_0 = x, S_{n+1} = S_n T_n$，此处 $(T_n)_{n \geq 0}$ 是一个二项随机变量序列，满足：$P(T_n = 1 + a) = p = \frac{b - r}{b - a}, P(T_n = 1 + b) = 1 - p.$

由上述结论有：

$$P_{am}(n,x) = \max\left((K - x)^+, \frac{pP_{am}(n+1,(1+a)x + (1-p)P_{am}(n+1,(1+b)x))}{1+r}\right) \quad (3)$$

再利用终端条件 $P_{am}(N,x) = (K - x)^+$. 选择参数：

$$r = \frac{RT}{N}, 1 + a = \exp(-\sigma \sqrt{T/N}),$$

$$1 + b = \exp(+\sigma \sqrt{T/N}), p = \frac{b - r}{b - a} \quad (4)$$

这样美式看跌期权价格的计算步骤为：给定一个离散参数 N，根据(i)，固定 r, a, b 根据(4) 利用(3) 计算在点 $x(1+a)^{n-i}(1+b)^i, 0 \le i \le n$ 的价格 $P_{am}^N(n,.)$，很自然地将 $P_{am}^N(0,x)$ 看作 Black-Scholes 模型中美式期权的近似值。实际上，能够证明 $\lim_{N \to \infty} P_{am}^N(0,x) = P(0,x)$[8].

4 结 论

利用泛函算子及 LMI(线性矩阵不等式)计算美式看跌期权的价格，可详细参考文献[5]。

结论：从定理 1 可知，在 Black-Scholes 公式假设条件下，美式看涨期权的价格与欧式看涨期权的价格相等，因此根据定理 1 和欧式看涨期权价格的计算公式可直接计算美式看涨期权的价格；定理 2 为美式看跌期权的价格的制定提供了一定的参考依据；在美式看跌期权的数字化计算方面，也进行了一些有益的探讨和研究. 至于期权套期交易策略的选择问题，文献[9]进行了详细讨论.

参考文献：

[1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. J of Political Economy, 1973, 81(3): 637 - 654.

[2] MERTON R C. Applications of option - pricing theory: Twenty - five years later[J]. The American Economic Review, 1998, 88(3): 323 - 349.

[3] 冯广波. 具有随机寿命的二维期权定价[J]. 国防科技大学学报, 2002, 24(5): 93 - 98.

[4] 刘海龙. 基于鲁棒控制的期权套期保值策略[J]. 控制与决策, 2001, 16(5): 974 - 976.

[5] DAMIEN LAMBERTON, LAPEYRE. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance[M]. London: Chapman & Hall, 1996. 1 - 171.

[6] BERNT, ф KSENDAL. Stochastic Differential Equation: An Introduction with Applications[M]. New York: Springer - Verlag Berlin Heidelberg(Fifth Edition), 1998. 215 - 217.

[7] 刘金宝. 金融工程 核心工具——期权[M]. 上海：上海文汇出版社, 1998. 157.

[8] LAMBERTON D, PAGES G. Surl'approximation des reduites[J]. Annales delIHP, 1990, 26: 141 - 183.

[9] 傅强, 蒲兴成. 完备市场下的期权定价和套期交易策略的选择[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2003, 26(5): 86 - 89.

Computing Method of America Option Under the Basis of Black-scholes Formula

PU Xing-cheng[1,2], *ZHENG Ji-ming*[2], *YOU Xiao-qian*[2]

(1. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. Computer Department of Telecommunication University, Chongqing 400065, China)

Abstract: On the basis of the theory of option pricing, We study the connection between America call option and European call option; Under the assumption condition of Black-Scholes formula, use the theory of martingales and stopping time, get the conclusion that: the price of America call option equals the price of European call option; Discuss some numeric computing methods of the put America option pricing, with the invarional inequaility for optimal stopping, prove the boundary property of America put option price and introduce some numeric computing methods of the put America option price.

Key words: america call option; america put option; numerically compute method; the optimal stopping time

(编辑 刘道芬)