

文章编号:1000-582X(2004)07-0126-05

平面杆系结构自由振动的一种解析解法*

周茂森,陈朝晖

(重庆大学土木工程学院,重庆 400030)

摘要:介绍了一种平面杆系结构自由振动的解析解法。即将计算无限自由度平面杆系结构的自振频率和主振型的广义特征值问题转换为典型的常微分方程边值问题,构造了一系列平凡 ODE,建立了相应的常微分方程组,并利用常微分方程求解器 COLSYS 予以求解。该方法将一根杆件视为一个单元,直接求解其运动微分方程,是一种数值解析法,与有限元法相比,无需通过增加单元数提高计算精度,可精确求解平面杆系结构的任意阶自振频率和主振型。并利用该方法求解了一般约束、弹性支座以及变截面条件下的平面杆系结构无阻尼弯曲自由振动的任意阶自振频率和主振型,与精确解和现有软件相比,其计算结果表明,该方法的求解精度和效率较高。

关键词:平面杆系结构自由振动;常微分方程边值问题;ODE 求解器

中图分类号:TU311.3

文献标识码:A

表征结构动力特性的量包括结构的自振频率、主振型及阻尼,其中,阻尼的大小可由试验测定,自振频率及振型可通过计算来确定。结构的自振频率及振型对于结构动力响应分析具有重要意义。严格说来,任何弹性体系都是无限自由度体系,但人们常采用集中质量法、能量法和有限元法将其简化为有限自由度体系进行计算,这些方法的物理模型都存在不同程度的近似,因而对弹性体系在动力荷载作用下的描述是不完整的。以有限元法为例,欲求解高阶频率和振型或提高精度必须以增加单元数为代价,故要实现精确求解任意阶频率和主振型,无论是在理论上还是在实践上都存在困难。

随着常微分方程(即 Ordinary Differential Equation,简记作 ODE)数值解法的发展,尤其近 10 年来一系列 ODE 求解器(即 Ordinary Differential Equation Solver)通用程序相继问世^[1-2],使直接针对结构自由振动微分方程的数值解析法成为可能。该方法与前述近似解法相比,物理模型是精确的,是数值解析法,可达到用户所指定的任意精度。

目前通行的 ODE 求解器都是求解常微分方程的边值问题(BVPs: Boundary Value Problems),不能直接

用于求解结构自由振动的广义特征值问题,因此,笔者应用了逆幂迭代法、移位法、函数空间的正交化方法以及一系列构造平凡 ODE 的技巧,将平面杆系结构自由振动的广义特征值问题转换为典型常微分方程边值问题,建立了相应的常微分方程组,并调用常微分方程求解器 COLSYS 求解^[3-4]。算例结果与精确解和现有软件相比,表明该方法的求解精度和效率较高。

1 数学模型的建立

1.1 振动微分方程

假设结构:

1) 为正交平面杆系结构;2) 不考虑杆件的轴向变形、剪切变形和扭转变形;3) 杆件各向同性、小变形、在线弹性范围内;4) 杆件在结构平面内作无阻尼弯曲自由振动。

对于结构中的各单元(一般一个杆件可视为一个单元),根据 d'Alembert 原理,可建立如下偏微分方程^[5]:

$$EI(x) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial EI(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} +$$

* 收稿日期:2004-03-08

基金项目:该论文获 2003 年重庆市优秀毕业论文一等奖

作者简介:周茂森(1980-),男,浙江海盐人,重庆大学 2003 级工学学士,主要从事结构工程专业方向的研究。

$$\frac{\partial^2 EI(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M_c(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式(1)中,挠度 $y(x,t)$ 是沿单元长度方向上坐标 x 和时间 t 的函数, $M_c(x)$ 和 $EI(x)$ 分别为分布质量和分布刚度,均为 x 的函数。

对式(1)分离变量,有:

$$y(x,t) = Y(x) \times e^{i\omega t} \quad (2)$$

式(2)中, $Y(x)$ 为振型函数, ω 为自振频率, $e^{i\omega t}$ 表示振型随时间变化的规律。将式(2)代入式(1),消去公因子 $e^{i\omega t}$,即得如下常微分方程:

$$EI(x) \frac{d^4 Y}{dx^4} + 2 \frac{dEI(x)}{dx} \frac{d^3 Y}{dx^3} + \frac{d^2 EI(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y}{dx^2} - M_c(x) \omega^2 Y = 0 \quad (3)$$

对于整个结构,将各单元相应的式(3)联立,即得振动常微分方程组,根据结构变形协调条件和力的边界条件,确定常微分方程组的解。

1.2 模型的标准化

一般地,常微分方程求解器 COLSYS 只能求解标准的线性和非线性 ODE 问题^[3],并不具备直接求解特征值问题的功能。因此,对于上述关于边值问题的常微分方程组的特征值问题,应将其转换为能够为 COLSYS 所接受标准的 ODE 形式。为此,需先做以下几项工作:

区间映射:即将非规则的求解区间映射为确定的标准区间,即将结构的每一单元长度坐标映射到 $[0,1]$ 区间上,保证每个结点处 x 坐标相同。对于长度为 L 的单元 i ,可令 $x = x_i/L$,则 $\frac{d(\quad)}{dx_i} = \frac{d(\quad)}{dx} \frac{dx}{dx_i} = \frac{1}{L} \frac{d(\quad)}{dx}$ 。

构造平凡 ODE:即对待定的特征值建立形如 $\lambda' = 0$ 的平凡 ODE,从而在保证 λ 为常数的前提下,将其引入 ODEs 中去求解。

构造等价 ODE:即将一重积分问题化为一阶常微分方程问题,以利用 COLSYS 求解。这一技巧可以应用到振型的归一化条件以及求解正交化时的过滤量系数。

引入单元局部坐标系:如图 1 所示, $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ 表示结构整体坐标系, xoy 表示单元局部坐标系, x 轴正向以单元映射坐标为 0 的端点指向单元映射坐标为 1 的端点 ($0 \leq x \leq 1$),从 x 轴正方向顺时针旋转 90° 即为 y 轴的正方向。单元上每一质点的 y 坐标表示在整体振型归一化条件下,各质点的横向振动位移。各单元的位移、转角、弯矩和剪力都以单元局部坐标系中规定的正向为正。

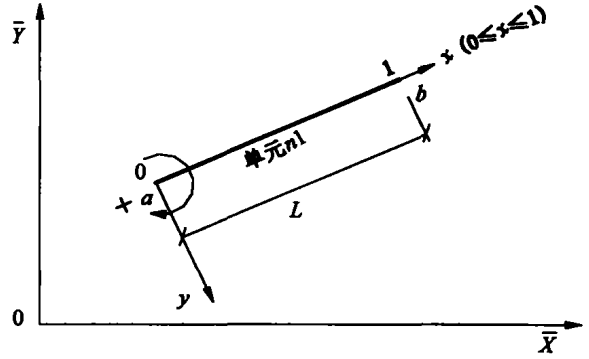


图 1 单元坐标变换

基于以上技巧,此问题就可转化为标准的 ODEs 形式:

$$(Y)_n^{(4)} = \left(\frac{M_c(x)L^4}{EI(x)} \lambda Y - \frac{2}{EI(x)} \frac{dEI(x)}{dx} Y^{(3)} - \frac{1}{EI(x)} \frac{d^2 EI(x)}{dx^2} Y^{(2)} \right)_n \quad (4)$$

式中, $\lambda = \omega^2$, $Y = Y(x)$, $n = 1, 2, \dots$, 结构总单元数, $x \in [0,1]$ 。

为保证求解过程不漏根并求得重频率还须采用以下的数值分析方法^[6]:

逆幂迭代:逆幂迭代具有很好的放大低阶、消减高阶特征函数成分的作用。随着迭代次数的增加,可同时收敛于最低阶特征值及相应的特征函数向量。单独利用逆幂法不能求解整个特征值问题,然而可以得到一个较为纯净的特征函数向量,然后用纯化后的解作为初始解应用非线性牛顿法进行求解,可加速收敛并确保精度。

正交化:先逆幂法后牛顿法可有效地求解 ODE 体系的主特征值及其特征函数,但我们还必须设法确定各高阶特征对(即主振型)。假设前 $i-1$ 个特征对 $(\lambda_j, \{Y_j\}, j = 1, 2, \dots, i-1)$ 已经确定,当前要确定第 i 个特征对。为了迫使逆幂迭代收敛到第 i 个特征对,我们采用正交化过程从用户提供的初始解中消除前 $i-1$ 个特征函数成分,以保证中间解的纯净。这样,低阶成分由正交化过程予以消除,而高阶成分由几次逆幂迭代加以消减,第 i 阶特征函数就变成主要成分,再转到牛顿法就可迅速收敛,彻底净化。

特征值移位:如前所述,在逆幂法中,当前后两阶特征值较为接近时,收敛极为缓慢,此时采用特征值移位能极大地加速逆幂迭代收敛。对移位后的 ODE 体系施行逆幂迭代可很快地收敛到最接近移位值 μ_i 的特征值。为了可靠和简便起见,选择 $\mu_i = 0.99\lambda_i - 1$,从而可求解重频率而不漏根。

2 算法框图

基于上述思想,采用 Visual Fortran 6.5 和 Visual

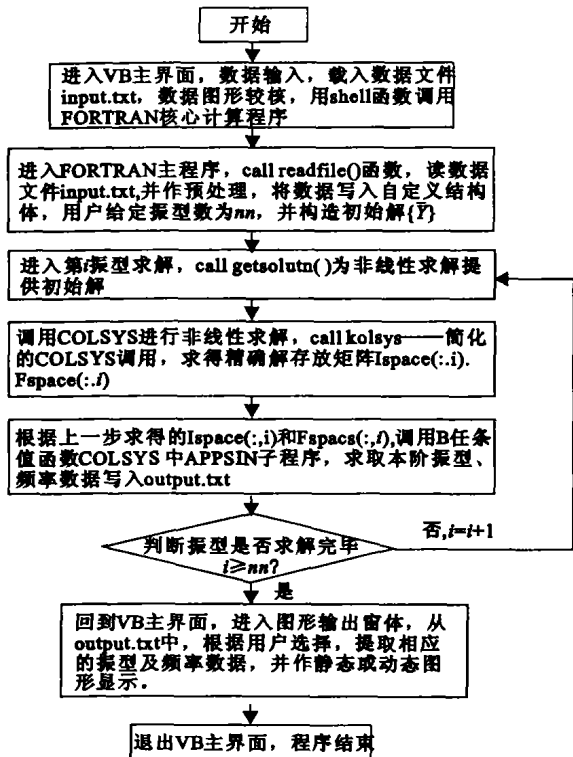


图2 程序总流程图

Basic 6.0 混合编程, 编制了平面杆系结构弯曲自由振动的通用求解程序 PFVI Solver, 且实现了振型动态显示。框图如图2、图3:

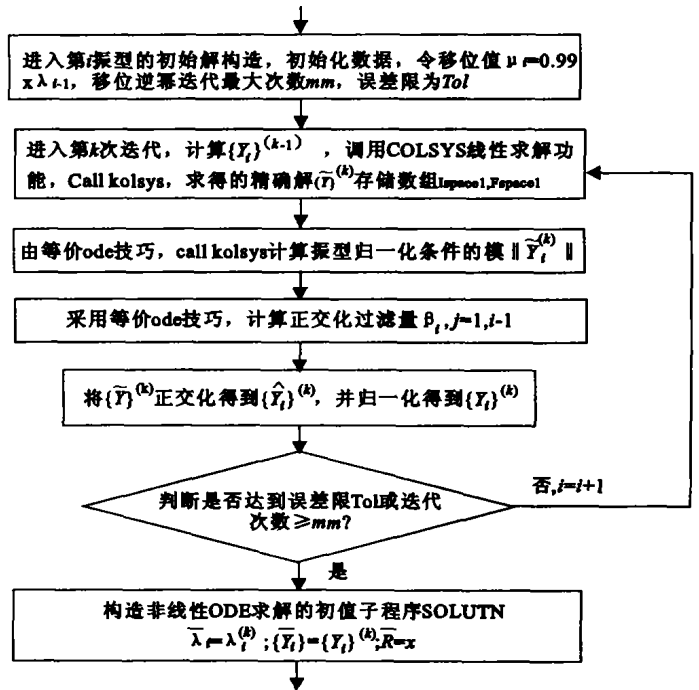


图3 核心计算子程序 getsolutn 流程图^[6]

3 算例

算例1 简支梁: 长度 $L = 1\text{ m}$, 均布质量密

表1 简支梁频率输出精度比较

频率	精确解	PFVI Solver		SMSolver		Ansys	
		频率值	相对误差	频率值	相对误差	频率值	相对误差
1	9.869 604 401	9.869 604 401	0.179D - 15	9.872 558 594	0.299D - 3	9.859 566 056	1.017D - 03
2	39.478 417 600	39.478 417 600	0.179D - 15	39.480 593 200	0.551D - 4	39.323 282 030	3.930D - 03
3	88.826 439 610	88.826 439 610	0.159D - 15	88.831 334 710	0.551D - 4	88.046 201 340	8.784D - 03
4	157.913 670 400	157.913 670 400	0.179D - 15	157.970 566 900	0.360D - 3	155.477 289 100	1.543D - 02
5	246.740 110 000	246.740 110 000	0.405D - 32	246.790 443 800	0.203D - 3	240.865 705 300	2.381D - 02
6	355.305 758 400	355.305 758 400	0.159D - 15	355.363 778 600	0.163D - 3	343.319 238 400	3.374D - 02
7	483.610 615 700	483.610 615 700	0.587D - 15	483.766 706 400	0.322D - 3	461.794 880 500	4.511D - 02
8	631.654 681 700	631.654 681 700	0.215D - 14	631.873 017 500	0.345D - 3	595.180 508 700	5.774D - 02
9	799.437 956 500	799.437 956 500	0.867D - 14	799.714 287 700	0.345D - 3	742.294 885 200	7.148D - 02
10	986.960 440 100	986.960 440 100	0.301D - 13	987.147 323 900	0.189D - 3	901.950 489 000	8.613D - 02

说明: 所用到的比较软件 SMSolver 是清华大学土木系袁驷教授等人研制的结构力学求解器, 该求解器的求解精度与效率已通过了 ADINA、ANSYS 等软件的对比验证。在这里, PFVI Solver 和 SMSolver 的误差限均为 0.000 5。

算例2 变截面连续梁: 如图4, 刚度 $EI(x)_1 = EI(x)_2 = (1+x)^3 (\text{N} \cdot \text{m}^2)$, 分布质量 $me(x)_1 = me(x)_2 = 1+x (\text{kg/m})$, 弹簧刚度 $k = 1000 \text{ N/m}$, 非

度 $M_c = 1 \text{ kg/m}$, 弯曲刚度 $EI = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 。前10阶自振频率见表1。

线性求解误差限为 0.000 5。(x 为单元区间映射坐标) 计算求得的前10阶频率见表2, 前4阶振型图见图5。

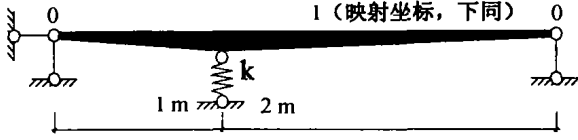


图 4 变截面连续梁

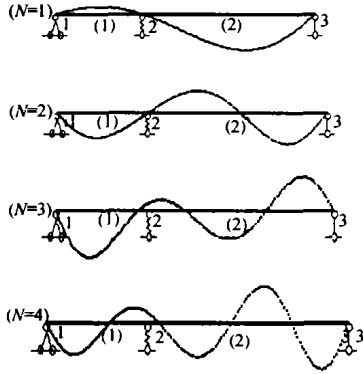


图 5 变截面连续梁前 4 阶主振型

表 2 带弹性支座的变截面梁频率计算值

频率	计算值	频率	计算值
01	4.776 422 585 260 708 5	06	76.496 339 364 786 990 7
02	14.414 534 845 798 924 0	07	100.793 517 873 814 892 0
03	22.781 309 328 851 307 3	08	129.723 261 115 676 194 8
04	37.714 694 474 899 587 8	09	158.619 912 136 240 827 7
05	57.756 125 950 942 937 7	10	192.308 105 825 349 542 8

算例 3 平面刚架：如图 6， $EI_1 = EI_2 = EI_3 = EI_4 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ， $me_1 = me_2 = me_3 = me_4 = 1 \text{ kg/m}$ ， $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 1 \text{ m}$ ，本结构重频率较多，故逆幂迭代时的误差限取为，非线性 ODE 求解的误差限为 5×10^{-4} ，逆幂迭代最大次数为 46 次。SMSolver 误差限取为 5×10^{-14} （模拟精确解）。计算求得前 10 阶频率值见表 3，前 4 阶振型见图 7。

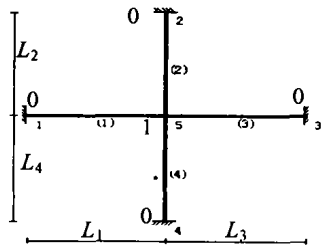


图 6 平面刚架

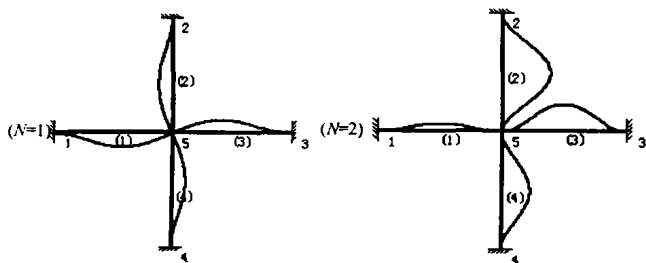


图 7 平面刚架前 2 阶主振型

表 3 十字交叉平面杆系结构计算结果精度比较

频率	PFVI Solver ω_1	SMSolver ω_2	相对误差
			$ \omega_1 - \omega_2 / \omega_2$
01	15.418 205 716 980 118 3	15.418 210 029 602 05	2.797 D - 7
02	22.373 285 448 061 988 5	22.373 289 089 753 14	1.627 D - 7
03	22.373 285 448 061 992 0	22.373 289 089 753 14	1.627 D - 7
04	22.373 285 448 061 953 0	22.373 289 089 753 14	1.627 D - 7
05	49.964 862 031 851 652 1	49.964 862 970 321 31	1.878 D - 8
06	61.672 822 868 147 442 0	61.672 828 442 940 61	9.039 D - 8
07	61.672 822 868 147 442 0	61.672 828 442 940 61	9.039 D - 8
08	61.672 822 868 147 449 1	61.672 828 442 940 61	9.039 D - 8
09	104.247 696 462 691 607 2	104.247 713 236 738 7	1.609 D - 7
10	120.903 391 738 409 155 2	120.903 421 330 497 0	2.447 D - 7

上述算例结果显示，频率计算结果满足指定精度，对于非重频率的振型精度也非常高。

4 结 语

通过以上算例，已经初步看到了基于 ODE 求解器的动力问题数值解析法的求解精度和效率。该方法不仅可以求解等截面直杆构成的平面杆系结构，还可以求解变截面杆件、弹性支座等结构的高阶振型。由于采用了逆幂迭代、正交化以及特征值移位等方法，提高了求解精度、速度，并保证不遗漏重根。

笔者仅是对结构自由振动问题数值解析法的初步研究，事实上，结构分析中的动力、稳定、二阶分析等都涉及 ODE 问题的求解，对此有待深入研究。该方法可用于由一维构件组成的多 - 高层框架、剪力墙、薄壁筒正交和斜交的组合结构的动力分析，对于由多维构件组成的筒体和筒中筒结构，则可沿横向离散化，沿纵向分段连续化，建立沿纵向的半解析微分方程组，然后调用 ODE 求解器求解^[1,7]。由此可见，数值解析法的应用前景是相当广阔的。

参考文献：

- [1] 包世华. 高层建筑结构解析、半解析常微分方程求解器方法系列[A]. 现代土木工程的新发展[C]. 南京: 东南大学出版社, 1998.
- [2] ASCHER U, CHRISTIANSEN J, RUSSELL R D. Collocation Software for Boundary - value ODEs [J]. ACM Trans Math Software, 1981, 7(2): 209 - 222.
- [3] ASCHER U, CHRISTIANSEN J, RUSSELL R D. Algorithm 569, COLSYS: Collocation Software for Boundary - value ODEs[D2] [J]. ACM Trans Math Software, 1981, 7(2): 223 - 229.
- [4] 袁驷. 介绍一个常微分方程边值问题求解通用程序——COLSYS[J]. 计算结构力学及其应, 1990, 7(2):

- 104 - 105.
- [5] 包世华. 结构力学 II [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [6] 袁驷, 张亿果. 常微分方程特征值问题的求解器解法 [J]. 地震工程与工程振动, 1993, 13(2): 94 - 102.
- [7] 龚耀清, 包世华, 龙驭球. 半无限大弹性地基上变截面筒中筒高层建筑结构的自由振动 [J]. 工程力学, 1999, 16(3): 7 - 14.

Analytic Method for the Free Vibration of Plane Frame Structure

ZHOU Mao-sen, CHEN Zhao-hui

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The analytic method for the free vibration of plane frame structure is presented. It is achieved by transforming the general eigenvalue problem of natural frequency and vibration mode of continuously distributed property system into typical boundary value problem of ordinary differential equation (ODE). A series of ODE, corresponding to the general eigenvalue problem, is formed, and then is solved by an general ordinary differential equation solver - COLSYS. Each component of a frame structure is regarded as an element in the analytic method. This makes it more efficient than that of finite element method which needs to increase elements to get the value of high - class natural frequency and vibration mode accurately. Some applications of the method show that it can solve the free bending vibration of plane - frame structure with various types of displacement constraint. The result indicates that this method is precise and efficient.

Key words: free vibration of plane frame structure; boundary value problem of ordinary differential equation; ODE solver

(编辑 姚 飞)

(上接第 93 页)

Information Retrieve Strategy for Subject Meta Search Engines

LV Chuan-yu¹, LI Hua¹, GEN Hu²

(1. College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Huangqiao TV Station, Taixing City, Jiangsu Province, Taixing 225400, China)

Abstract: Present meta search engines are key - based information retrieve. A plenty of irrelevant information is returned when user search some professional knowledge because Simple combination of key can not express accurately user's purpose. Subject meta search engines solve the problem. Based on the study of present technologies of meta search engines and domain knowledge base, an information retrieve strategy is put forward which is fit for subject meta search engines. It effectively improves efficiency and precision of information retrieve. The main content of this paper are to introduce the key idea and technologies of the retrieve strategy.

Key words: subject; meta search engines; search engines; retrieve strategy

(编辑 吕赛英)