文章编号:1000 - 582X(2005)11 - 0134 - 04

平面梁单元的非节点连接方法*

王家林[1,2],陈山林[1],彭　凯[2],肖盛燮[2]
(1. 重庆大学 土木工程学院,重庆　400030; 2. 重庆交通学院 桥梁及结构工程系,重庆　400074)

摘　要:为了在平面梁单元范畴内解决钢筋混凝土结构的建模问题,将钢筋与混凝土视为不同的单元,在分析平面梁单元内任一点位移的基础上,根据位移协调条件,利用虚功原理建立了钢筋单元与混凝土单元不需要通过节点连接的非节点连接方法. 该方法能够比较方便地模拟工程结构中构件含加劲材料、构件截面在不同阶段变化等复杂组合和连接问题. 算例考察了钢筋混凝土梁的位移和加固问题,验证了方法的可行性,演示了在使用上的便利.

关键词:平面梁单元;虚功原理;非节点连接
中图分类号:O242.21　　**文献标识码**:A

在土木工程领域,常常遇到加筋混凝土构件、施工过程中构件截面组分或截面形式随施工阶段发生变化、加固时在原构件上增加或粘贴加强材料等复合材料和结构连接问题.

对于上述问题,现有常规的做法是用等效截面进行计算分析,这种方法在构件构成方式简单的情况下比较方便,在斜向、多向布筋等复杂情况下会遇到困难;对于截面随施工阶段变化的情况(如构件分层浇注、粘贴钢板加固等),当截面变化时必须重新计算截面性质,截面各组分的应力状态需要专门进行跟踪,还需要考虑截面形心变化对结构的改变,非常烦琐.

另一种思路是将构件的加劲材料或新增组分视为单独的单元,通过与原构件进行连接、复合来参与结构整体分析. 当组分单元的全部节点位于 1 个母体单元内时,可采用组合单元法[1-5]进行单元复合,如果组分单元的节点位于不同单元,可采用笔者提出的单元之间不通过节点连接的非节点连接方法实现各单元的组装.

1　梁单元内任一点位移的分析

单元如图 1,单元坐标系下的节点位移以 $\{\delta'_e\} = \{u'_i \quad v'_i \quad \theta'_i \quad u'_j \quad v'_j \quad \theta'_j\}$ 表示.

根据单元的位移模式,在单元坐标系下,单元内任意截面位置、中性轴上 C 处的位移为:

$$\begin{Bmatrix} u'_C \\ v'_C \\ \theta'_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \\ 0 & N_{2,x} & N_{3,x} & 0 & N_{5,x} & N_{6,x} \end{bmatrix} \{\delta'_e\}. \tag{1}$$

式(1)中,N_i 为各位移的形函数插值多项式.

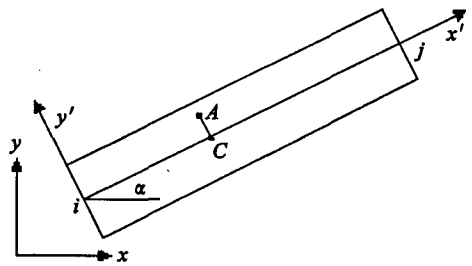

图 1　梁单元位移分析示意图

根据梁单元变形的平截面假定,设 C 处截面转角为 θ_C,则偏离 C 处中性轴距离为 y' 的 A 处的位移为:

$$\begin{Bmatrix} u'_A \\ v'_A \\ \theta'_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_C \\ v'_C \\ \theta'_C \end{Bmatrix} + y' \begin{Bmatrix} -\sin\theta_C \\ \cos\theta_C - 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

在小转动假设下,可推导得:

$$\begin{Bmatrix} u'_A \\ v'_A \\ \theta'_A \end{Bmatrix} = [\overline{N}_A]\{\delta'_e\}. \tag{3}$$

* 收稿日期:2005 - 06 - 14
作者简介:王家林(1968 -),男,重庆万州人,重庆交通学院副教授,重庆大学博士研究生,主要从事结构有限元分析方法研究.

式(3)中$[\overline{N}_A]$为单元内任意点 A 的形函数矩阵：

$$\begin{bmatrix} N_1 & -yN_{2,x} & -yN_{3,x} & N_4 & -yN_{5,x} & -yN_{6,x} \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \\ 0 & N_{2,x} & N_{3,x} & 0 & N_{5,x} & N_{6,x} \end{bmatrix} \tag{4}$$

式(3)需转化到整体坐标系，记：

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

经过坐标变换，可得在整体坐标系下，单元内任意点 A 的位移与单元节点位移的关系为：

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\lambda}]^T[\overline{N}_A]\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\{\delta_e\} = [S_A]\{\delta_e\}, \tag{6}$$

其中$[S_A]$为整体坐标系下 A 点的形函数矩阵：

$$[S_A] = [\boldsymbol{\lambda}]^T[\overline{N}_A]\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{7}$$

2　梁单元的非节点连接

不失一般性，考虑如图 2 的问题：设某部分混凝土基体单元网格为 ij 和 jk，1 条折线布置的钢筋划分为 2 个单元 lm 和 mn. 这里把钢筋也视为梁单元[5]，并只处理钢筋和混凝土位移完全协调的问题. 作为近似处理，根据有限元的分片插值原理，这里假设混凝土单元在加入钢筋后仍满足梁的位移模式.

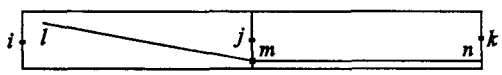

图 2　钢筋和混凝土单元的非节点连接示例

图 2 表现了钢筋和混凝土连接可能出现的情况：1)钢筋单元的节点落在混凝土单元的内部，且不一定位于混凝土单元的端部，如节点 l；2)钢筋单元的 2 个节点可能会落在不同的混凝土单元内，以图 2 为例：如果视节点 m 在单元 ij 内，则钢筋单元 mn 的 2 个节点落在了 2 个不同的单元，如果视节点 m 在单元 jk 内，则钢筋单元 lm 的 2 个节点落在了 2 个不同的单元.

尽管由于单元 ij、jk 在连接处位移的协调性，将节点 m 放在任一单元都不会产生计算结果的差别，但单元的 2 个节点位于不同的单元内却给处理问题带来了一定的困难. 如果一个单元的 2 个节点完全位于另一个单元的内部，可以通过单元复合技术[1-5]来实现两者的复合；对于图 2 问题，由于钢筋单元的 2 个节点可能落在不同的混凝土单元内，不能再采用单元复合的方法来处理，必须采用更一般的非节点连接技术来实现.

设图 2 中，钢筋单元 lm 的节点 m 位于混凝土单元 jk 内.

由于节点 l 在混凝土单元 ij 内，在整体坐标系下有：

$$\{\delta_l\} = \begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \\ \theta_l \end{Bmatrix} = [S_l]\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

节点 m 在混凝土单元 jk 内，在整体坐标系下有：

$$\{\delta_m\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ \theta_m \end{Bmatrix} = [S_m]\begin{Bmatrix} \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

式(8)、式(9)可以统一表示为下面形式：

$$\begin{Bmatrix} \delta_l \\ \delta_m \end{Bmatrix} = [S]\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}. \tag{10}$$

式(10)表明了单元 lm 的自由度$\begin{Bmatrix} \delta_l \\ \delta_m \end{Bmatrix}$与$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}$之间的关系，称$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}$为单元 lm 的独立自由度.

对单元 lm，在整体坐标系下有：

$$[K]\begin{Bmatrix} \delta_l \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_l \\ F_m \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

对应的虚功形式为：

$$\delta\begin{Bmatrix} \delta_l \\ \delta_m \end{Bmatrix}^T[K]\begin{Bmatrix} \delta_l \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \delta\begin{Bmatrix} \delta_l \\ \delta_m \end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix} F_l \\ F_m \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

将式(10)代入式(12)可得：

$$\delta\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}^T[S]^T[K][S]\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}^T[S]^T\begin{Bmatrix} F_l \\ F_m \end{Bmatrix}, \tag{13}$$

由虚位移的任意性，有：

$$[S]^T[K][S]\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} = [S]^T\begin{Bmatrix} F_l \\ F_m \end{Bmatrix}, \tag{14}$$

记$[\overline{K}]$、$\{\overline{F}\}$分别为单元 lm 对应于其独立自由度$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}$的单元刚度矩阵和等效节点力：

$$[\overline{K}] = [S]^T[K][S]; \tag{15}$$

$$\{\overline{F}\} = [S]^T\begin{Bmatrix} F_l \\ F_m \end{Bmatrix}. \tag{16}$$

则有:

$$[\bar{K}]\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\\ \delta_k\end{Bmatrix}=\{\bar{F}\}. \tag{17}$$

在单元组装的过程中,只要按照自由度$\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\\ \delta_k\end{Bmatrix}$将$[\bar{K}]$装配到结构的整体刚度阵中,即可反映单元 lm 对整体结构的刚度贡献,从而实现钢筋单元与混凝土单元的非节点连接.

由上面的过程可以看出,特殊单元本身自由度与其独立自由度之间的关系式(10)是实现单元非节点连接的关键.

对于钢筋单元 mn,由于 2 个节点均在混凝土单元内 jk 内,其独立自由度为$\begin{Bmatrix}\delta_j\\ \delta_k\end{Bmatrix}$,通过位移分析可以得到:

$$\begin{Bmatrix}\delta_m\\ \delta_n\end{Bmatrix}=[S]\begin{Bmatrix}\delta_j\\ \delta_k\end{Bmatrix} \tag{18}$$

此后按式(15)同样可得到其关于独立自由度$\begin{Bmatrix}\delta_j\\ \delta_k\end{Bmatrix}$的刚度矩阵.

在有些特殊情况下,会出现单元的一个节点在某单元上、另一节点独立的情况,如图 3.

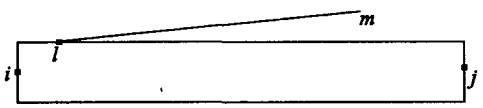

图 3 梁单元的非节点连接示例

此时,单元 lm 的独立自由度由节点 i、j 和 m 的自由度共同组成,通过位移分析得到:

$$\begin{Bmatrix}\delta_l\\ \delta_m\end{Bmatrix}=[S]\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\\ \delta_m\end{Bmatrix} \tag{19}$$

再按式(15)即可得到单元 lm 关于独立自由度$\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\\ \delta_m\end{Bmatrix}$的单元刚度阵.

对于大量钢筋单元位于混凝土单元内部的情况,可以采用折减钢筋单元弹性模量的方法考虑钢筋对混凝土的挖空效应:$E_{eq}=E_s-E_c$(E_s为钢筋弹性模量,E_c为混凝土弹性模量).

各单元刚度阵组装完毕,可以求解得到所有独立自由度,再由独立自由度与单元本身自由度之间的关系就可得到单元节点位移,于是便可按常规方法计算单元的内力、应力等其它响应.

从上述过程可以看出,非节点连接过程在单元分析过程中完成,如果一个节点位于其它单元内部,则其自由度不会出现在整体结构自由度中,不会增大结构整体刚度阵的计算规模.

对于截面由多种材料组成或者截面在不同阶段变化的情况,采用梁单元的非节点连接技术,直接将各组分划分为不同的单元即可处理,不需要计算组合截面的形心坐标,也不需要考虑形心坐标变化对结构受力的影响;在原来结构上新增受力部件,也只需要在原单元划分上简单地增加新单元.

采用梁元的非节点连接技术,一个单元的节点可以位于另一单元内部的任何位置,能够为一些复杂问题提供方便灵活的单元划分方式.

3 算 例

算例 1 如图 4 所示矩形截面钢筋混凝土简支梁,长 $AC=8$ m,截面高 $h=0.4$ m,宽 $b=0.2$ m,钢筋直径 $d=0.02$ m,钢筋截面形心到截面底边的距离为 $a=0.04$ m,混凝土弹性模量 $E_c=2.0\times10^4$ MPa,钢筋弹性模量 $E_s=2.0\times10^5$ MPa. 在跨中作用集中力 $P=200$ N.

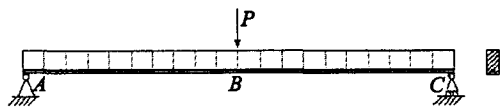

图 4 受跨中集中力的钢筋混凝土简支梁

沿杆长方向将混凝土梁划分为 20 个混凝土梁元,钢筋用 20 个梁元模拟,表 1 将计算得到的跨中挠度与其它方法[5-6]进行了对比. 从该表可以看到,采用笔者的计算方法得到的结果具有很高的精度.

表 1 钢筋混凝土简支梁跨中挠度

各种解法	跨中挠度/mm	误差/%
含筋解析解(文献[6])	0.093 85	(参照标准)
本文数值解	0.093 86	0.01
文献[5]数值解	0.094 37	0.55
无筋解析解	0.100 00	6.55

算例 2 如图 5 折线对称配筋的矩形截面预应力混凝土梁,长 $AC=8$ m,截面高 $h=0.7$ m,宽 $b=0.3$ m;力筋束截面面积为 12.566 4 cm^2,A、C 两端锚固点在截面中性轴以上 0.2 m,中间直线段长 4 m,直线段形心在截面中性轴以下 0.25 m;混凝土弹性模量 $E_c=3.3\times10^4$ MPa,力筋束弹性模量 $E_s=1.9\times10^5$ MPa. 梁在跨中受集中力 $P=10\ 000$ N 作用. 现对其进行加固,加固方案为:在全梁底面粘贴 0.5 cm 厚钢板以改善构件抗弯能力;在斜线配筋梁段侧面粘贴

0.5 cm 厚钢板以改善构件抗剪能力,钢板弹性模量 $E_s = 2.1 \times 10^5$ MPa.

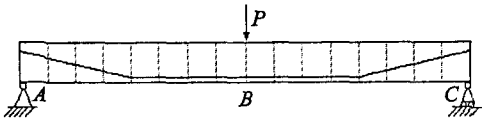

图 5　折线对称配筋受跨中集中力的混凝土梁

对于此问题,若按传统换算截面的方法得到各个等效截面,必然会因为单元各截面性质不同而产生复杂的变截面梁单元问题. 采用本文非节点连接方法,将梁沿纵向划分为 16 个梁单元,直接在混凝土梁单元上加入模拟钢筋和钢板的梁单元,非常直接、方便地就处理了该问题. 经计算,得到表 2 结果.

表 2　简支预应力混凝土梁粘贴钢板加固效果分析

计算结果	加固前	加固后	降低比率/%
跨中挠度/mm	3.628	3.168	12.7
跨中上沿压应力/MPa	7.997	7.455	6.8
跨中下沿拉应力/MPa	7.707	6.650	13.7
端部混凝土剪力/KN	50.210	41.390	17.6

4 结 论

在深入分析平面梁单元内任一点位移的基础上,利用虚功原理建立了平面梁单元的非节点连接方法. 应用非节点连接技术,梁单元的一个或 2 个节点可以位于另一梁单元内部(包括端部), 2 个节点也可以位于不同的 2 个单元,也可以一个节点在某单元内、另一节点独立.

这种方法打破了常规有限元方法中单元之间必须通过节点连接的限制,给单元划分提供了更大的选择空间,可以比较方便地解决工程中的一些复杂组合和连接问题,比如复合材料含加劲构件、构件截面在不同阶段变化等情况,能方便地计算出各组分的内力,这在非线性分析等问题中是非常有用的. 算例验证了方法的正确性和准确性、显示了在使用上的便利.

参考文献:

[1] PHILLIPS D V, ZIENKIEWICZ O C. Finite Element Nonlinear Analysis of Concrete Structures[J]. Proc Institution of Civil Engineers, 1976, 61(2):59 - 88.

[2] CHANG T Y, TANIGUCHI H, CHEN W F. Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels[J]. J Struct Engrg ASCE, 1987, 113(1):122 - 140.

[3] ELWI A E, HRUDEY T M. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1989, 115(4):740 - 754.

[4] 雷晓燕. 钢筋混凝土有限元模型的研究[J]. 华东交通大学学报,1992,9(1):1 - 11.

[5] 王家林. 钢筋混凝土结构空间有限元分析的体梁组合单元[J]. 工程力学,2002,19(6):131 - 135.

[6] 叶见曙. 结构设计原理[M]. 北京:人民交通出版社,1996.

Non-nodal Connection Method for Plane Beam Elements

WANG Jia-lin[1,2], *CHEN Shan-lin*[1], *PENG Kai*[2], *XIAO Sheng-xie*[2]

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. College of Civil Engineering & Architecture, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: In reasonably modeling reinforced concrete structures with plane beam elements, the reinforcement and the concrete are regarded as different elements respectively, which would be joined together with the non-nodal connection method put forward under the principle of virtual work based on the displacement analysis at an arbitrary point in a plane beam element and according to the consistent condition of displacements. Then with that method, more problems of complex combination and connection can be conveniently and precisely simulated, such as reinforced members or members with changing sections in different construction phases. In the numeric examples, the displacement of a reinforced concrete beam and the strengthening effects on another reinforced concrete beam are analyzed, the feasibility of the method is verified and its convenience is demonstrated.

Key words: plane beam element; principle of virtual work; non-nodal connection

(编辑　姚　飞)