

文章编号:1000-582X(2005)03-0076-04

乘积码的一种新的迭代译码算法*

冯文江,彭万权,曾祥明

(重庆大学通信工程学院,重庆 400030)

摘要:乘积码是利用线性分组码实现长码的典范,能纠正大量的随机错误和突发错误,当以 Turbo 码的思想实现乘积码的迭代译码时,可获得很高的编码增益。针对乘积码提出一种新的迭代译码算法,该算法的反馈方式有别于 Turbo 码的传统迭代译码,是通过输出软信息与接收软信息进行线性叠加来实现的,此时子译码器的候选码字数将大为降低,同时译码输出也无须做复杂的 LLR 计算,直接映射为由 $-1, +1$ 组成的软输出矩阵,从而在牺牲较小性能的情况下很大程度地降低了译码复杂度。

关键词:线性分组码;乘积码;级联码;chase 译码算法;Turbo 迭代译码;反馈

中图分类号:TN911.22

文献标识码:A

香农信息理论指出,长码和编码随机化是寻找渐进好码的有效途径,这无疑为纠错编码的研究指明了方向,而乘积码正是体现这种思想的典型例子。就本质而言,乘积码是一种特殊的级联码,它以并不复杂的方式实现了长码和编码随机化。但是在很长一段时间,乘积码的译码问题未得到有效解决,因此一直不能得到很好的应用。1994年 Phndiah R^[1] 提出一种类似于 CTC^[2] 的迭代译码算法,这种算法的软输出值是基于对数似然比(Logarithm Likelihood Ratio: LLR)的计算,当选用分量码为(32, 26)扩展汉明码时进行4次迭代,在 10^{-5} 误码率条件下能提供高达6.2 dB的纯编码增益,引起学者对乘积码研究的高度关注。但这种译码算法在计算软输出信息时,必须在大量的候选码字中寻找一定数量的竞争码字,同时还要通过实验的方式确定一系列参数,增加了译码复杂度,其中一个重要环节是当找不到竞争码字时用常数 β 代替软输出值,之后的研究多是围绕如何确定 β 值,以及如何确保性能的前提下减少候选码字而展开,比如用距离参数计算 β 值的方案^[3],但复杂度并未得到太大的降低。本文针对乘积码的译码问题,提出一种新的算法,算法的核心思想仍建立在软输入软输出迭代译码的基础上,但软输出值的计算和软输入值的反馈方式有别于 Turbo 码的其它传统算法。仿真研究表明,在相同性能要求条件下,本算法的译码复杂度得到了较大的

降低。

1 乘积码的编码和传统硬判决译码

乘积码最早由 Elias 提出^[4],对于一个二级串行级联分组码^[5]而言,当采取行进列出交织方式时便可被视为一个二维乘积码,其构造方法如下:

1) 对 $k_1 \times k_2$ 比特长度的信息码元,按顺序排列成一个 $k_1 \times k_2$ 阶码阵 C ;

2) 按某个线性分组码 $C_2[n_2, k_2, \delta_2]$ 的编码规则对 C 逐行进行编码,得到一个 $k_1 \times n_2$ 阶的新码阵 C' ;

3) 按某个线性分组码 $C_1[n_1, k_1, \delta_1]$ 的编码规则对 C' 逐列进行编码,最后得到 $n_1 \times n_2$ 的乘积码 E 。这里对 C' 采用了最简单的行进列出交织,这种交织技术适用于高斯信道,对于其它更为复杂的信道,通常采用另外的交织方式,此时便可视其为一般的级联码。由以上编码规则可看出,码阵 E 可分割成4块:信息块、行校验块、列校验块、校验之校验块,如图1所示。可以证明^[6] E 的最小重量为 $\delta_1\delta_2$,所以乘积码可被看作 $(n_1n_2, k_1k_2, \delta_1\delta_2)$ 的线性分组码,此时除了能纠正所有重量不大于 $\lfloor \frac{\delta_1\delta_2 - 1}{2} \rfloor$ 的随机错误图样外,还能纠正其

它大量的随机和突发错误图样。乘积码的硬判决译码比较简单:先逐行(或列)进行硬判决译码,再逐列(或

* 收稿日期:2004-10-30

基金项目:重庆市应用基础研究资助项目(2002-7367)

作者简介:冯文江(1963-),男,四川南充人,重庆大学教授,博士,从事通信与测控技术等方面的研究。

行)进行硬判决译码。但这种译码方法完全忽略了信道的统计特性,因此并不能获得理想的编码增益。另外,接收端对外码(行或列)也可以进行软判决译码,但和 RS/viterbi 码类似,它只对内码(列或行)的译码提供硬判决数据。以上两种译码方式都不能有效利用由信道特性所决定的有用信息,因而不利于充分挖掘乘积码的潜在纠错能力。

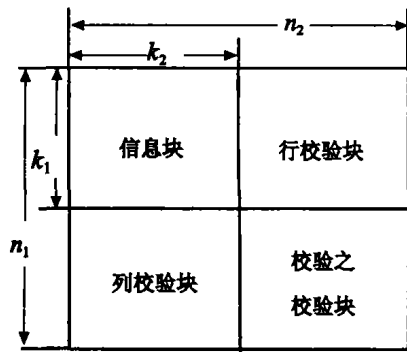


图 1 乘积码的分块

2 线性分组码的软判决译码

一旦乘积码的分量码确定后,后者的纠错能力直接决定前者的纠错能力,而软判决译码正是提高线性分组码纠错能力的重要手段。对二进制线性分组码 $C[n, k, \delta]$ 的码元作 0、1 到 -1、+1 的映射,若发送码字通过方差为 σ 的高斯信道,则接收序列可表示为

$$R = E + G \quad (1)$$

其中 $R = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T$ 为接收序列, $E = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$ 为发送码字, $G = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$ 为高斯噪声对应码元时钟所得到的抽样。根据最大似然译码准则,最优判决码字 D 必满足

$$P(R/D) \geq P(R/C^j) \quad (2)$$

其中 $C^j \in C, j=1, 2, \dots, 2^k$ 。考虑 R, D, C^j 中各码元之间的独立性,由式(1)得

$$P(R/C^j) = \prod_{i=1}^n P(r_i/c_i^j) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - c_i^j)^2\right] \quad (3)$$

根据式(2)、式(3)可知最佳码字 D 成立得条件是

$$\sum_{i=1}^n (r_i - d_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (r_i - c_i^j)^2 \quad (4)$$

若称

$$\sum_{i=1}^n (r_i - c_i^j)^2 = |R - C^j|^2 \quad (5)$$

为 R 与 C^j 的欧氏距离,则 D 为所有码字空间 C 中与 R 欧氏距离最小的一个码字。由此可知,若要做到最佳译码,必须将 C 中所有 2^k 个码字与 R 进行欧氏距

离运算而选择最小者 D 作为译码输出,但译码复杂度会随着 k 的增加而指数增加,因此它并不适合长码。Chase2 算法^[7] 则能克服这种缺陷,它运用最近领域译码的思想,将候选码字数从 2^k 降为 $2^{\lceil \delta/2 \rceil}$,其算法步骤如下:

1) 对 R 作到 Y 的映射,映射规则为 $y_i = 0.5(1 + \text{sgn}(r_i))$, 即 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 为常规意义的二进制;

2) R 到 Y 的映射过程中,其可信度是参差不齐的,通常以式子

$$\Lambda(y_i) = \ln\left(\frac{P\{e_i = +1/r_i\}}{P\{e_i = -1/r_i\}}\right) = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)r_i \quad (6)$$

的绝对值作为判断标准,在 $[y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 中选出 $p = \lceil \delta/2 \rceil$ 个可信度最低的码元;

3) 确定一个由 0, 1 组成的 $\lceil \delta/2 \rceil$ 维向量 T , 共计 $2^{\lceil \delta/2 \rceil}$ 个;

4) 将式(3)中所属每一个向量的 $\lceil \delta/2 \rceil$ 个码元按顺序逐个与式(2)中所属 $\lceil \delta/2 \rceil$ 个可信度最低的码元进行模二和运算,共得到 $2^{\lceil \delta/2 \rceil}$ 个新的二元序列,它们构成了子集 Ω ,其成员被硬判决译码后作出 (0, 1) 到 (-1, +1) 的映射,提供与 R 作欧氏距离运算,取最小者作为最终的译码输出。

Chase2 软判决译码算法虽然不是最佳译码,但它以牺牲微弱的性能来换取译码复杂度的极大简化,因此在实践中得到广泛应用。

3 乘积码的反馈迭代译码

考虑发送码阵 E , 经过 BPSK 调制后通过高斯信道可以得到一个软信息码阵 R , 译码器的构成如图 2 所示。图中的交织器为行进列出交织器,软输入软输出器(Soft Input Soft Output: SISO)由分量码译码器和映射器构成,分量码译码器输出 n_1 或 n_2 长度的码字,映射器将由 0、1 组成的二进制码字映射为由 +1、-1 组成的“软输出”数据,分量码译码器可采用硬判决译码,也可以采用不同的软判决译码。对于 m , 子译码器完成第 m 次行(或列)译码,映射器实现 (0, 1) 到 (-1, +1) 的映射后,得到由 -1 或 +1 组成的“软输出矩阵” $W(m)$, 经过交织后得到 $W'(m)$ 对于下一次的列(或行)译码,给出的软输入矩阵为

$$R'(m+1) = \alpha(m)W'(m) + (1 - \alpha(m))R' \quad (7)$$

其中 $\alpha(m)$ 为校正因子。当得到软输入矩阵 $R(m+2)$ 时,便完成了一个完整的迭代过程,此时要么可进行类似的下一次迭代,要么可将 $R(m+2)$ 进行硬判决后删

除掉校验块,完成整个译码过程。由以上的描述可知迭代译码的本质特征在于反馈的引入,码阵 $W(m)$ 可被视为利用码字冗余度滤除掉一部分噪声的数据流,不过它所携带的噪声的表现形式为错误比特而已,这一点正好保证了反馈的合理性,如果其结果可提高误码特性,便可视其为良性反馈。 $\alpha(m)$ 是调整反馈深度的参数,取决于误码率,按实验方式确定。

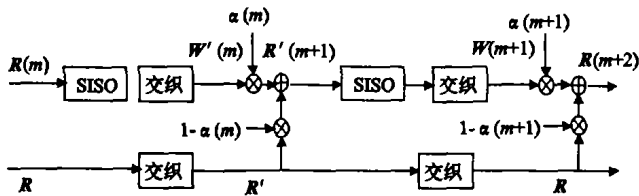


图2 译码器构成框图

进一步分析表明,上述反馈属于良性反馈,只要给出适当的 $\alpha(m)$,便可作多次重复,每次重复可使错误图样的重量更低,从而在这种译码方式所决定的极限纠错能力内寻找到重量尽可能低的错误图样,之所以有校正因子 $\alpha(m)$ 和 $1-\alpha(m)$,是为了使 $R(m+1)$ 服从近似于均值为+1或-1的正态分布,从而使每次的线性叠加显得匹配。

4 仿真研究

乘积码的迭代译码算法仿真研究基于BPSK调制方式和高斯信道,选用二维乘积码,分量码为二进制扩展汉明码或扩展BCH码^[8],列分量码和行分量码相同。为了清楚描述算法的译码过程,对乘积码仅进行半个迭代,即第一个译码器输出码阵 $W(1)$ 后按式(7)得到 $R(2)$,然后直接对 $R(2)$ 进行判决和删除校验块。当信噪比一定时,误码率与 $\alpha(1)$ 之间为确定的函数关系,图3为 $E_b/N_0=6$ dB时 $\alpha(1)$ 与误码率之间的关系曲线。当 $\alpha(1)=0$ 时,等效于不编码,当 $\alpha(1)=1$ 时则可被视为仅对行进行软判决译码,由该图可看出反馈深度直接影响译码性能。 $\alpha(1)=1$ 到 $\alpha(1)=0.4$ 有几乎一样的误码特性,但反馈之初希望小一些,如此可以在保证译码性能的前提下尽量少用原始信息,从而为以后的反馈创造条件,这也是本算法的关键所在。图中的曲线较好地反映了该算法与传统译码算法之间的区别与联系。

图4为乘积码进行1次、2次、3次、4次迭代时误码率与信噪比关系图,迭代4次后当误码率等于 $10e-5$ 时可获得约4.5 dB的纯编码增益。可以看出,随着迭代次数的增加,获得的增益增量会变得越来越小,这是迭代译码算法所具有的基本特征。

分量码的译码可采取硬判决译码,图5为(64,

51) × (64, 51)乘积码的子译码器分别采用硬判决译码和chase2软判决译码迭代4次时所得到的误码率与信噪比关系图,该图反映了分量码纠错能力对乘积码性能的影响。

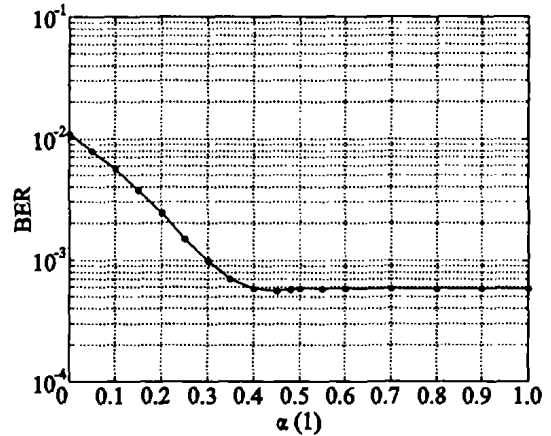


图3 $\alpha(1)$ 与误码率关系曲线

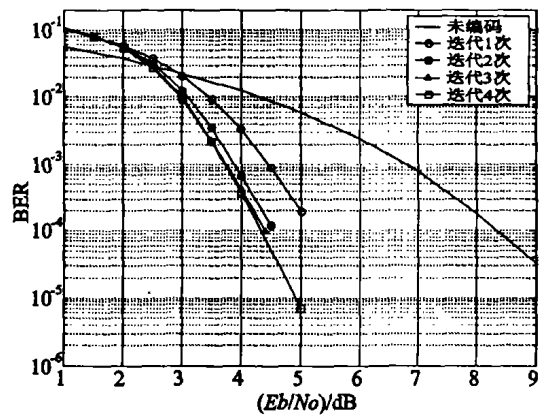


图4 (32,26) × (32,26)乘积码逐次迭代对比图

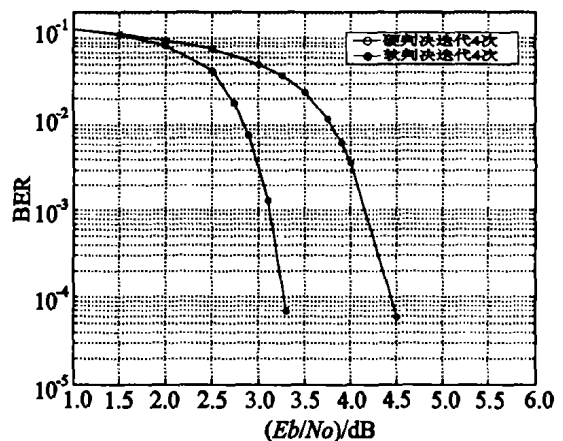


图5 (64,51) × (64,51)乘积码子译码器不同时误码率与信噪比关系曲线比较图

图6是分量码分别为(32, 21), (64, 57), (64, 51), (64, 45), (128, 106)时迭代4次的误码率与信噪比关系图,取前3个和基于LLR算法的迭代译码相比,在 10^{-5} 处分别较文献[9]大约降低1.2 dB、1 dB和0.7 dB的编码增益,由此可知,算法是以牺牲性能为代价换取复杂度的降低。

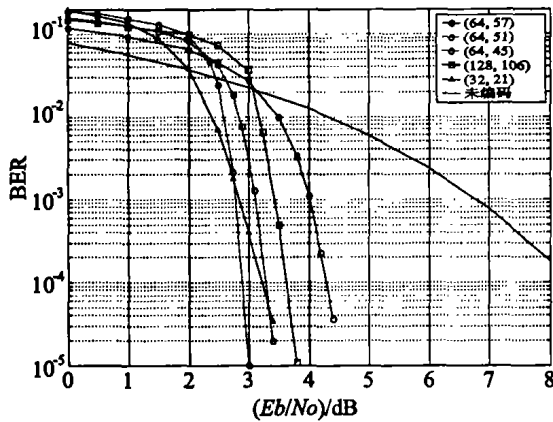


图6 不同乘积码4次迭代后的误码率与信噪比关系曲线

5 结论

该译码算法的关键在于致力于寻求一种良性反馈,参数 $\alpha(m)$ 的选取是为了把这种良性反馈的作用发挥到极致。算法的最大优点是非常简单,因此对于任何译码方法已经解决了的线性分组码,由其组成的乘积码都可以采取这种迭代译码算法。对于给定了分量码的乘积码,子译码器既可以采取硬判决译码,也可以采取各种软判决译码,从而可以在译码复杂度和译码性能之间进行灵活选择。

参考文献:

- [1] PHNDIAH R. Near Optimum Decoding of Product Codes[J]. IEEE Trans on Comm, 1994, 28(1):339-343.
- [2] BERROU C, GLAVIEUX A, THITIMAJSHIMA P. Near Shannon Limit Error-Codes[J]. IEEE Int Conf on Comm, 1993, 12(3):1 064-1 070.
- [3] MARTIN P A, TAYLOR D P. Distance Based Adaptive Scaling in Suboptimal Iterative Decoding [J]. IEEE Trans on Comm, 2002, 50(6):869-871.
- [4] ELIAS P. Error-Free Coding[J]. IEE Trans on Inform Theory, 1954, 4(4): 29-37.
- [5] FORNEY G D. Concatenated Codes[M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1966.
- [6] 张宗橙. 纠错编码原理与应用[M]. 北京:电子工业出版社,2003.241.
- [7] CHASE D. Class Algorithms for Decoding Block Codes with Channel Measurement Information[J]. IEEE Trans on Inform Theory, 1972, 18(1): 170-182.
- [8] 王新梅. 纠错码——原理与方法[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2001.253
- [9] PYNDIAH R M. Near-Optimum Decoding of Product Codes: Block Turbo Codes [J]. IEEE Trans on Comm, 1998, 46(8):1 003-1 010.

New Iterative Decoding Algorithm of the Product Codes

FENG Wen-jiang, PENG Wan-quan, ZENG Xiang-ming

(College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The product codes using linear block codes set up a mirror in the realization of long codes and hold the outstanding performance for random error and burst correction. It can gain very excellent error-correcting capability when a product code performs decoding with the method of turbo codes based on iterative decodes. The paper describes a new iterative decoding algorithm for the product codes, its feedback method is completed by a linear combination of soft output of encoder and the receipt information is different with the traditional turbo iterative decode. When decoder obtains the soft output matrix built -1 and $+1$, the complexity can be reduced greatly and the performance can be lost little by reducing the number of candidate code words and omitting the complicated operation of LLR.

Key words: linear block codes; product codes; concatenated codes; chase decoding algorithms; turbo iterative decodes; feedback