

文章编号:1000 - 582X(2005)04 - 0078 - 04

# 加权残值法计算薄板的临界压力\*

尹 刚,冯 贤 桂

(重庆大学 资源及环境科学学院,重庆 400030)

**摘 要:**弹性薄板屈曲的临界压力计算,在弹性力学中一般都是采用双三角级数解法,计算过程比较复杂,工程中应用不方便。同时薄板的临界压力在很多情况下得不到准确的解析结果,所以求解薄板临界压力的近似解在工程设计中很有必要。加权残值法是求解微分方程近似解的一种有效的数学方法,广泛应用于各种工程技术领域。为了简化计算过程,得到有用的近似解,利用加权残值法与康脱洛维奇变分原理,以第二类切比雪夫多项式和三角函数作为试函数,求解矩形薄板在不同支承条件下屈曲时的临界压力。通过实例计算表明这种方法计算简单,具有一定的精确度,在工程实际中应用方便。

**关键词:**屈曲;临界压力;加权残值法;切比雪夫多项式;变分原理

**中图分类号:** O343.9

**文献标识码:** A

在工程实际中,弹性薄板的应用很广泛。薄板在受面内压力作用时,会发生屈曲变形而失去稳定性,因而确定薄板失稳时的临界压力,在薄板的设计与应用中至关重要。弹性薄板的临界压力在多数情况下不能得到精确的解析解。已经得到的一些薄板临界压力的解析解,其求解过程复杂,在工程中应用不大方便。利用数值计算方法计算弹性薄板失稳时的临界压力,在保证一定精确度的条件下,求出简单而便于应用的数值解,这在板的工程设计中很有必要。作者利用加权残值法和康脱洛维奇变分原理得到了弹性薄板临界压力的数值解,这种解法在工程实际中有一定应用价值。

式(2)中  $A_k(x_n), k = 1, 2, \dots, m$  为  $x_n$  的待定函数。将式(2)代入式(1),可以得到一个新的依赖于自变量  $x_n$  的泛函

$$J[A_1(x_n), A_2(x_n), \dots, A_m(x_n)] \quad (3)$$

由泛函取得极值的条件  $\delta J = 0$ , 可以得到一组关于  $A_k(x_n)$  的欧拉微分方程组

$$L[A_k(x_n)] = 0, k = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

求解欧拉微分方程组,并满足所给边界条件,即可得到待定函数  $A_1(x_n), A_2(x_n), \dots, A_m(x_n)$ , 再代入式(2)便得原变分问题的近似解。

## 1.2 微分方程的伽辽金解法

在数值计算中,可以采用加权残值法中的伽辽金解法<sup>[2]</sup>来求解欧拉微分方程组(4)。

对于微分方程边值问题

$$Lu - f = 0, \text{区域 } v \text{ 上}$$

$$Bu - g = 0, \text{边界上 } \partial v \text{ 上} \quad (5)$$

用如下线性形式的试函数

$$\tilde{u}(x, c) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \quad (6)$$

作为近似解。 $c_1, c_2, \dots, c_n$  为待定参数,  $\varphi_0$  的选取应满足问题的全部边界条件,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  是选定的一组线性无关的函数,称为基函数,它们应满足对应的齐次边界条件,即在  $\partial v$  上  $B(\varphi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。

## 1 基本原理

### 1.1 康脱洛维奇变分原理

文献[1]中利用康脱洛维奇变分原理计算了矩形截面杆扭转剪应力,这种原理可以方便地用于各种多变量函数的泛函变分问题。对于满足一定边界条件的多变量函数的泛函

$$J[w(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (1)$$

选用满足边界条件的函数系列  $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), k = 1, 2, \dots, m$  把变分问题式(1)的近似解写成

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m A_k(x_n) \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (2)$$

\* 收稿日期:2004 - 12 - 20

作者简介:尹刚(1964 -),男,重庆市人,重庆大学硕士,主要从事机械设计及计算机自动化研究。

将式(6)代入式(5),即得到残值方程

$$R(x, c) = L\bar{u}(x, c) - f \quad (7)$$

伽辽金方法取基函数 $\varphi_i(x)$ 作为权函数,使残值式(7)的加权平均值为零

$$\int \varphi_i(x) R(x, c) dv = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

式(8)为关于待定参数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 的代数方程组,求解后可确定这些待定参数,得到微分方程边值问题式(5)的近似解。对于偏微分方程,待定参数 $c_i$ 可选为某一自变量的待定函数。

在计算薄板临界压力时,作者采用一级近似计算,泛函变分问题的近似解,即式(2)中只取一项来进行计算

$$w = (x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1(x_n) \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (9)$$

式(9)中 $A_1$ 与 $\varphi_1$ 选用满足弹性薄板边界条件的基函数,笔者采用三角函数或用第二类切比雪夫多项式表示的梁函数作为基函数。将康脱洛维奇变分原理用于弹性薄板的能量泛函时,可以使二维问题变为一维问题,同时由于切比雪夫多项式的正交性,使计算过程简化了很多。所得解答中有一部分是通过欧拉方程求得的严格解,因此即使采用一级近似计算,也可以保证一定的精确度。

## 2 第二类切比雪夫多项式

第二类切比雪夫多项式的前6项<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \quad (-1 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (10)$$

第二类切比雪夫多项式的正交性

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_m(x) U_n(x) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, m = n \end{cases} \quad (11)$$

采用无量纲坐标 $\xi = \frac{x}{a}$ ,设梁的左端 $\xi = -1$ ,梁的右端 $\xi = 1$ ,所取坐标见图1,容易求得长为 $2a$ 的梁在不同支承条件下的梁函数。

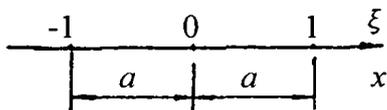


图1 梁的无量纲坐标

## 3 弹性薄板屈曲时的能量泛函

由弹性薄板理论<sup>[4-5]</sup>,薄板在屈曲时的能量泛函为

$$\begin{aligned} \Pi = & \iint \left\{ \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)中 $w$ 为薄板中面的挠度, $D$ 为薄板的弯曲刚度, $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ , $N_x, N_y, N_{xy}$ 是由纵向载荷引起的中面内力。

当弹性薄板没有自由边,即周边为简支或固定时,由文献[6]中的相关结论,式(12)可简化为

$$\begin{aligned} \Pi = & \iint \left\{ \frac{D}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

计算薄板临界压力时,采用无量纲参数

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & \frac{\Pi a^3}{D b t^2}, \bar{w} = \frac{w}{t}, \xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \lambda = \frac{a}{b} \\ \bar{N}_x = & \frac{a^2}{D} N_x, \bar{N}_{xy} = \frac{a^2}{D} N_{xy}, \bar{N}_y = \frac{a^2}{D} N_y \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)中, $t$ 为弹性薄板的厚度,矩形板的长度与宽度分别为 $2a$ 和 $2b$ 。

将无量纲参数用于式(12)和式(13)即可得到矩形弹性薄板无量纲能量泛函

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \right)^2 + 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \lambda^4 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] - \right. \\ & \left. 2(1-\mu)\lambda^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[ \bar{N}_x \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 + 2\lambda \bar{N}_{xy} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + \lambda^2 \bar{N}_y \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \right)^2 + 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + \lambda^4 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[ \bar{N}_x \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 + 2\lambda \bar{N}_{xy} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + \lambda^2 \bar{N}_y \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

在泛函变分问题中,取式(15)和式(16)的近似解

$$\bar{w} = cu(\xi)v(\eta) \quad (17)$$

即作一级近似计算,上式中 $c$ 为待定常数, $u(\xi)$ 及 $v(\eta)$ 选取在 $x, y$ 方向上分别满足矩形薄板边界条件的切比雪夫梁函数或三角函数。

### 4 弹性薄板临界压力的计算

#### 4.1 四边简支的矩形薄板

图 2 所示矩形薄板, 四边简支, 受均匀压力  $P_x$  作用, 板的中面内力  $N_x = -P_x, N_y = 0, N_{xy} = 0$ 。

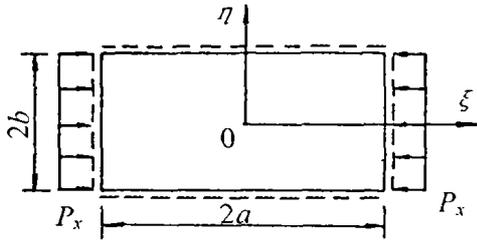


图 2 例 4.1 矩形板

设屈曲时, 板的中面挠度

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= cu(\xi)v(\eta) \\ u(\xi) &= U_4(\xi) - 21U_2(\xi) + 58U_0(\xi), \\ v(\eta) &= U_4(\eta) - 21U_2(\eta) + 58U_0(\eta) \end{aligned}$$

由式(16) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{II} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{c^2}{2} [(u''v)^2 + 2\lambda^2 u'vuv'' + \lambda^4 (uv'')^2] - \right. \\ &\quad \left. \frac{c^2}{2} \tilde{P}_x (u'v)^2 \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (18)$$

式中  $\tilde{P}_x = \frac{a^2}{D} P_x$

将式(18) 两边乘以  $\sqrt{1 - \eta^2}$ , 利用切比雪夫多项式的正交性, 对  $\eta$  进行积分后, 再由泛函的极值条件  $\delta\tilde{II} = 0$ , 得到  $u(\xi)$  的欧拉方程

$$u^{(4)}(\xi) + (\tilde{P}_x - 4.9185\lambda^2)u''(\xi) + 6.0536\lambda^4 u(\xi) = 0 \quad (19)$$

由于已经取  $u(\xi) = U_4(\xi) - 21U_2(\xi) + 58U_0(\xi)$ , 所以式(19) 等号左边即为微分方程的残值  $R$ , 以  $u(\xi)$  为权函数, 利用伽辽金方法, 有

$$\int_{-1}^1 u(\xi) R d\xi = 0 \quad (20)$$

设矩形薄板  $a = b, \lambda = 1$ , 由式(20) 并利用切比雪夫多项式正交性, 积分后得  $\tilde{P}_x = 9.7595$ 。

正方形薄板的临界压力

$$(P_x)_{cr} = \tilde{P}_x \frac{D}{a^2} = 9.7595 \frac{D}{a^2} = 39.038 \frac{D}{(2a)^2}$$

此值与文献[5] 的解答  $(P_x)_{cr} = 39.44 \frac{D}{(2a)^2}$  相差 1%。

#### 4.2 一对边固定、一对边简支矩形薄板

图 3 所示矩形薄板, 一对边固定、一对边简支, 受均匀压力  $P_x$  作用。中面内力  $N_x = -P_x, N_y = 0, N_{xy} =$

0, 设矩形板屈曲时, 板的中面挠度

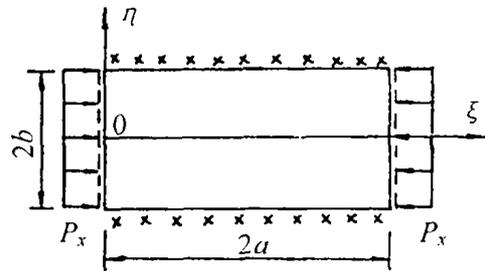


图 3 例 4.2 矩形板

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= cu(\xi)v(\eta), u(\xi) = \sin \frac{m\pi}{2} \xi, m = 1, 2, 3, \dots, \\ v(\eta) &= U_4(\eta) - 5U_2(\eta) + 10U_0(\eta) \end{aligned}$$

设  $\tilde{P}_x = \frac{a^2}{D} P_x$ , 通过与 4.1 例相同的计算过程, 可得

得

$$\tilde{P}_x = 6.3492\lambda^2 + 20.3175 \frac{\lambda^4}{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2} + \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2$$

矩形薄板的临界压力

$$(P_x)_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{(2b)^2}, k = \frac{4\tilde{P}_x}{\lambda^2 \pi^2}$$

$(P_x)_{cr}$  的计算结果列于表 1 中。

表 1 例 4.2  $(P_x)_{cr}$  计算值

$m$	1	1	1	1	1	2	2
$\lambda = \frac{a}{b}$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$k$ (文献[6])	9.44	7.69	7.05	7.00	7.29	7.83	7.69
$k$ (作者计算值)	9.36	7.41	6.56	6.26	6.28	8.19	7.41

$(P_x)_{cr}$  的计算值大部分与文献[6] 的结果相接近。

#### 4.3 一对边简支、一对边固定、自由矩形薄板

图 4 所示矩形薄板, 一对边简支, 另一对边为固定、自由, 受均匀压力  $P_x$  作用。板的中面内力  $N_x = -P_x, N_y = 0, N_{xy} = 0$ , 设屈曲时, 板中面挠度

$$\tilde{w} = cu(\xi)v(\eta)$$

$$u(\xi) = \sin \frac{m\pi}{2} \xi, m = 1, 2, 3, \dots,$$

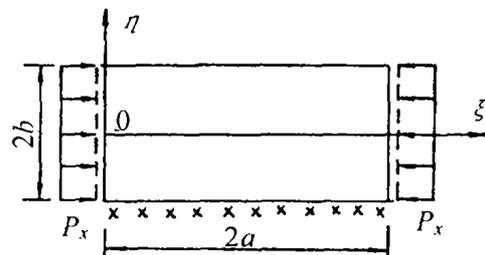


图 4 例 4.3 矩形板

$$v(\eta) = U_4(\eta) - 8U_3(\eta) + 27U_2(\eta) + 208U_1(\eta) + 298U_0(\eta)$$

设  $\mu = 0.25, \bar{P}_x = \frac{a^2}{D} P_x$ , 利用式(15), 经过计算后, 可以求得

$$\bar{P}_x = 1.851\lambda^2 + 0.7283 \frac{\lambda^4}{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2} + \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2$$

矩形薄板的临界压力

$$(P_x)_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{(2b)^2}, k = \frac{4\bar{P}_x}{\lambda^2 \pi^2}$$

$(P_x)_{cr}$  的计算值列于表 2。

表 2 例 4.3  $(P_x)_{cr}$  计算值

$m$	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
$\lambda = \frac{a}{b}$	1.0	1.2	1.5	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	3.0	3.4
$k$ (文献[6])	1.70	1.47	1.34	1.34	1.38	1.45	1.47	1.40	1.34	1.34
$k$ (作者计算值)	1.87	1.62	1.46	1.45	1.48	1.54	1.62	1.54	1.46	1.44

$(P_x)_{cr}$  的计算值与理论值较接近, 误差在工程应用许可范围以内。如果增加试函数的项数, 计算精确度还可提高。

## 5 结 论

利用康脱洛维奇变分原理与加权残值方法推导了弹性薄板屈曲时临界压力的计算公式。对几种不同支承条件下的矩形薄板, 计算了它们的临界压力。计算结果表明, 所采用的方法简单、实用, 具有一定的精确度, 在工程设计中有其应用价值。对于其他形状的弹性薄板, 只要能构造出满足边界条件的试函数, 所采用的计算方法也是适用的。

### 参考文献:

- [1] 冯贤桂. 矩形截面杆扭转的康脱洛维奇解法[J]. 力学与实践, 1997, 19(2): 67-68.
- [2] 吴永礼. 计算固体力学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [3] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1998.
- [4] 李存权. 结构稳定和稳定内力[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.
- [5] 陆明万, 罗学富. 弹性理论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- [6] 曲庆璋, 章权, 季求知, 等. 弹性板理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.

## Calculating Critical Loads of Thin Plates With Method of Weighted Residuals

YIN Gang, FENG Xian-gui

(College of Resource and Environment Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** In elastic mechanics, it is common practice to calculate critical loads in buckle of thin plates by means of double triangle series. The calculation process is more complex, this method has not facility in engineering application. In many cases critical loads of thin plates can not obtain precise analytic solutions. It is very important to solve approximate resolutions of critical loads of plates in engineering. The method of weighted residuals is an available measure to solve proximal resolutions of differential equations and has extensive application in engineering. In order to simplify calculation process and obtain profitble result, by means of method of weighted residuals and Cantorovich variational principle, taking the second Tchebychev's polynomials as trial functions, it was calculated, critical loads of rectangle thin plates in different supporting conditions. Calculation results indicate that this calculation method is simple and has some precision, it is applied conveniently in engineering.

**Key words:** buckle; critical load; method of weighted residuals; Tchebychev's polynomials; variational principle