

文章编号:1000-582X(2005)05-0136-03

一维溃坝洪水波的数值模拟 - 时空守恒法*

张永祥, 陈景秋, 韦春霞

(重庆大学工程力学系, 重庆 400030)

摘要:应用改进的时空守恒法对一维溃坝洪水波进行了数值模拟,从计算结果与分析解比较可知,该法能够很好地模拟溃坝洪水波,甚至对于下游为干河的情况,依然能得到满意的结果。而且,此方法精度高,有较强的溃坝涌波捕捉能力,可展示溃坝波的运动特性,为溃坝引起的灾害预测和分析及防灾减灾提供一种有效的数值模拟。

关键词:溃坝;圣维南方程;时空守恒律;涌波
中图分类号: O352

文献标识码: A

水坝的安全问题构成了对人类生命和财产的潜在威胁^[1]。在数学表达上,重力引起的浅水运动类似于可压缩流体的运动,求解含激波的空气动力学双曲波问题^[2-3]的方法可用来求解含涌波的浅水运动问题。近年来 MacCormack, Bean - Warming, Godunov, TVD^[2], Adaptive Grid^[4]等格式都取得了一定的效果,但并不十分理想,一般差分格式在涌波的捕捉上往往不能同时满足虚假振荡的抑制和足够高的精度。近年来 S C Chang^[5]提出了一种崭新的数值方法,它与传统的数值方法相比具有许多独特的优点:1)其构造思想简单,物理意义清晰,格式通用性好,它不用求解黎曼问题,也不用求解特征问题。2)它把时间与空间完全统一同等对待,并从守恒律积分行方程出发,通过设立守恒元和解元,使局部和全局都严格保证其物理意义上的守恒律。3)该方法把流场变量和其对空间导数均作为作为变量同时求解,这样与传统的差分格式相比,在相同的格式点数的情况下,其格式精度达到更高,还更便于边界条件的精确履行。但原始方法在一维情况要设立2个守恒元,不易推广到更高维,张增产^[6-8]对此方法进行了改进,使得方法简化,且保留了原方法的优点,并成功的模拟了空气动力学中的激波现象,得到的精度更高。为此,笔者应用改进的时空守恒法对一维溃坝洪水波进行了数值模拟。

1 一维浅水波方程

St. Venant 一维浅水波方程守恒形式为

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial x} = q_m, m = 1, 2. \quad (1)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= h, u_2 = hu, \\ f_1 &= hu = u_2, \\ f_2 &= hu^2 + \frac{g}{2}h^2 = \frac{u_2^2}{u_1} + \frac{g}{2}u_1^2, \\ q_1 &= 0, q_2 = gh(S_0 - S_f). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $S_f = \frac{u^2 \eta^2}{R^{4/3}}$, η 为 Manning 摩阻系数, R 为水力学半径, 当河道为矩形时约等于 h , u 为流速, S_0 为底坡, S_f 为摩阻坡降, g 为重力加速度, x 为沿河底的距离, 取下游方向为正, t 为时间。

令 $x_1 = x, x_2 = t$ 代表 Euclidean 空间 E_2 中的2个坐标, 利用高斯散度定理可知, 微分方程(1)可以写成如下的积分形式:

$$\oint_{S(V)} h_m \cdot ds = \int_V q_m dV, m = 1, 2. \quad (3)$$

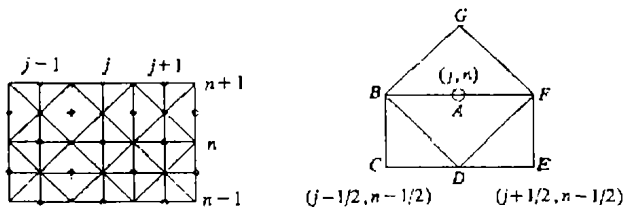
其中 $S(V)$ 是 E_2 空间中任一区域 V 的边界, $ds = (dv, dt)$, $h_m = (f_m, u_m), m = 1, 2$ 是时间 - 空间中的质量, 动量的流

* 收稿日期:2004-12-20

基金项目:国家自然科学基金项目(10472136)和教育部重点科技项目(02058)

作者简介:张永祥(1978-),男,浙江诸暨人,重庆大学博士研究生,主要从事计算水力学方向研究。

密度向量,从式(3)可以看出时间和空间是完全统一起来同等对待的。用 Ω 代表 E_2 中的网格点 (j, n) 集合 (见图 1a), 其中 $n = 0, \pm 1/2, \pm 2/2 \dots$, 对于每个 n , 取 $j = n \pm 1/2, n \pm 3/2 \dots$ 。时空守恒法关键是设立解元和守恒元, 原始 S. C. Chang 提出要 2 个守恒元, 而张增产进行了改进, 只要一个守恒元就能解决问题, 使得方法得到简化, 对于 $\forall (j, n) \in \Omega$ 设有一个解元 $SE(j, n)$ (图 1b 中四边形 BDFG 所围区域的内部) 和一个守恒元 $CE(j, n)$ (图 1b 中四边形 BCEF 所围区域的内部) 与之对应。



(a) 网格分布图 (b) 守恒元 $CE(j, n)$ 和解元 $SE(j, n)$ 划分
图 1 网格的划分

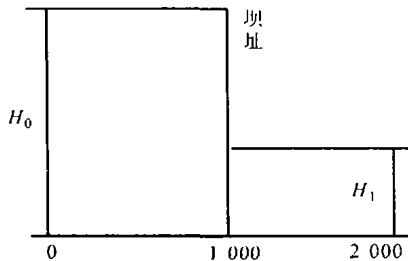


图 2 一维矩形断面全溃坝模型

对于 $\forall (j, n) \in SE(j, n)$, 用一阶泰勒级数展开的函数 $u_m^*(x, t; j, n)$, $f_m^*(x, t; j, n)$ 来逼近函数 $u_m(x, t)$, $f_m(x, t)$, 从方程(1)可知, $q_m(x, t)$ 其偏导数比 $u_m(x, t)$, $f_m(x, t)$ 低一阶, 因此相应地可用更低一阶(即零阶)泰勒级数展开式 $q_m^*(x, t; j, n)$ 来逼近函数 $q_m(x, t)$ 的即取

$$u_m^*(x, t; j, n) = (u_m)_j^n + (u_{mx})_j^n \cdot (x - x_j) + (u_{mt})_j^n (t - t_j), \quad (4)$$

$$f_m^*(x, t; j, n) = (f_m)_j^n + (f_{mx})_j^n \cdot (x - x_j) + (f_{mt})_j^n (t - t_j), \quad (5)$$

$$q_m^*(x, t; j, n) = (q_m)_j^n. \quad (6)$$

因此相应地可设:

$$h_m^*(x, t; j, n) = (f_m^*(x, t; j, n), u_m^*(x, t; j, n)), \quad (7)$$

则式(3)可以用下式来进行逼近

$$\oint_{S(CE(V))} h_m^* \cdot ds = \oint_{CE(V)} q_m^* \cdot dV, \quad \forall (j, n) \in \Omega. \quad (8)$$

分别将 $u_m = u_m^*(x, t; j, n)$, $f_m = f_m^*(x, t; j, n)$ 代入式(1)中可知:

$$(u_{mx})_j^n = - (f_{mx})_j^n + (q_m)_j^n, \quad (9)$$

由式(8)可知最终要求求解的独立变量只有 u_m 和 u_{mx} 。

将式(3)、(4)、(5)代入式(6)然后一并代入式(7), 经过适当整理便可以得到:

$$(u_m)_j^n - \frac{\Delta t}{4} (q_m)_j^n = \frac{1}{2} [(u_m)_{j-1/2}^{n-1/2} + (u_m)_{j+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{4} ((q_m)_{j-1/2}^{n-1/2} + (q_m)_{j+1/2}^{n-1/2}) + (s_m)_{j-1/2}^{n-1/2} - (s_m)_{j+1/2}^{n-1/2}]. \quad (10)$$

其中

$$(s_m)_j^n = \frac{\Delta x}{4} (u_{mx})_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_m)_j^n + \frac{\Delta t}{4\Delta x} (f_{mt})_j^n. \quad (11)$$

式(10)是一个主要的离散方程, 为了得到另一个变量 u_{mx} 的关系式, 我们假定 u_m 在 2 个不同时间半层的相邻解元的公共点 B, F (见图 1(b)) 处连续, 则可以得到

$$(u_{mx})_j^n = \frac{1}{2} [(u_{mx}^+)_{j-1/2}^n + (u_{mx}^-)_{j-1/2}^n]. \quad (12)$$

其中

$$(u_{mx}^\pm)_j^n = \pm \frac{\Delta x}{2} [(u_m)_{j\pm 1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} (u_{mt})_{j\pm 1/2}^{n-1/2} - (u_m)_j^n]. \quad (13)$$

对于计算所关心的是溃坝洪水波的波前的状态, 由于会出现明显的间断——水跃, 则必须对于式(12)进行适当的修改, 笔者采用 MinMod 函数来加以限制, 能够有效的抑制水跃附近的非物理数值振荡。

$$(u_{mx})_j^n = \minmod[(u_{mx}^+)_{j-1/2}^n, (u_{mx}^-)_{j-1/2}^n]. \quad (14)$$

其中 $\minmod(a, b)$ 定义为:

(i) $\minmod(a, b) = \text{sgn}(a) \cdot \min(|a|, |b|)$, 当时 $a \cdot b > 0$ 时;

(ii) $\minmod(a, b) = 0$, 其他情况。 (15)

2 数值结果

考虑图 2 所示的瞬间全溃问题: 等宽矩形断面河道上有一底坡为 S_0 , 摩阻为 S_f 的低坝, 坝址位于 1 000 m 处, 溃决前上下游均为静水, 水深分别为 H_0 和 H_1 , 取计算域长 2 000 m, $\Delta x = 2.5$ m, 网格点数 $N = 801$ 显示计算的时间步长, 依赖于 Courant 条件:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max(\sqrt{gh} + q/h)_i}, \quad 1 \leq i \leq N$$

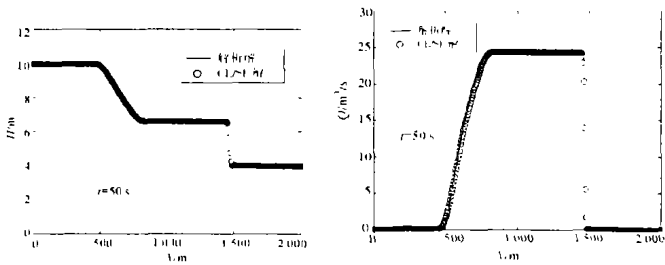
假设河道为水平、平底、无阻尼。对于溃坝洪水波最关心的是洪水波的波高、流量和波前的间断面, 图 3(a) ~ (c) 对于下游不同的水面高度进行了模拟, 并与分析解进行了比较, 从图 3(a) ~ (c) 中可以得知, 坝址处于稀疏波区, 流量在坝址处达到最大。从图

3(c)中可以得知,下游为干河的情况,现在比较流行的算法如 TVD,特征线法等不能进行有效的模拟,只能在下游假设一个很薄的一层水面,计算结果会产生一定的偏差。而本方法得到的结果与分析解比较可知,

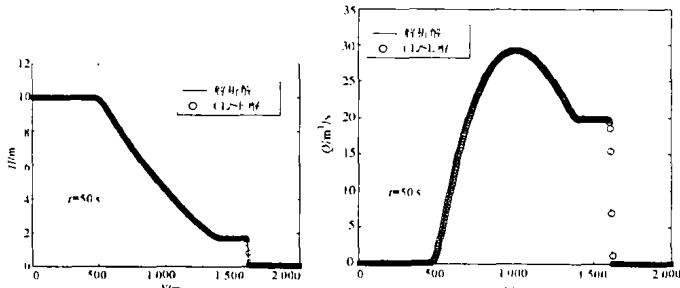
误差很小。表1给出了上游为10 m,对于不同的下游的高度与解析解、TVD解^[2]的比较。从表1中可以看出 CE/SE法计算的波高与分析解误差更小。

表1 不同下游水深与分析解,TVD解比较

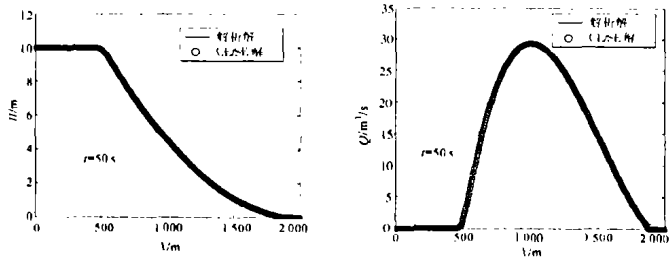
解法	$H_1 = 4\text{ m}$		$H_1 = 1.76\text{ m}$		$H_1 = 1.38\text{ m}$		$H_1 = 0.4\text{ m}$	
	波高	误差	波高	误差	波高	误差	波高	误差
Stoke 解析解	2.627	0	3.087	0	3.062	0	2.463	0
HartenTVD	2.526	-1.520	2.846	-7.810	2.809	-8.260	2.690	9.220
YeeTVD	2.618	-0.140	3.015	-2.330	2.979	-2.710	2.357	-4.300
CE/SE	2.626	-0.038	3.086	-0.032	3.061	-0.033	2.462	-0.041



(a) $H_1 = 4\text{ m}$



(b) $H_1 = 0.1\text{ m}$



(c) $H_1 = 0.0\text{ m}$

图3 下游不同水深时水面线和流量与分析解的比较

3 结论

应用 CE/SE 法模拟了瞬间溃坝洪水波的演进过程,数值结果表明,该方法格式简单,通用性更好,计算

量小,计算结果精度高,溃坝涌波的间断具有很高的分辨率,而且对于下游为干河的情况依然能得到很好的计算结果。因此,应用 CE/SE 法模拟的瞬间溃坝洪水波能够很好的展示了溃坝洪水波的运动特性,为预测溃坝引起的灾害及防灾减灾等提供了有效的科学手段。

参考文献:

- [1] SINGH V P. Dam Breach Modelling Technology [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] 王嘉松,倪汉根,金生,等. 用 TVD 显格式模拟一维溃坝洪水波的演进与反射[J]. 水利学报,1998,(5):1-5.
- [3] 陈景秋,王宗笠. 多维双区波问题的双特征方法[M]. 重庆:重庆大学出版社,2001.
- [4] MIZANUR RAHMAN, HANIF CHAUDHRY M. Simulation of Dam - break Flow with Grid Adaptation[J]. Advances in Water Resources,1998,21(1):1-9.
- [5] CHANG S C. The Method of Space - time Conservation Element and Solution Element - a New Approach for Solving the Navier - Stokes and Euler Equations [J]. Computational Physics,1995,119:295-324.
- [6] 张增产,沈孟育. 改进的时空守恒元和解元方法[J]. 清华大学学报,1997,37(8):65-68.
- [7] 张增产,沈孟育. 一种严格保证时 - 空守恒率的数值方法[J]. 计算物理,1997,14(6):835-841.
- [8] 张增产,沈孟育. 用时空守恒方法求带源项及刚性源项的守恒率方程[J]. 清华大学学报,1998,38(11):87-90.

(下转第 147 页)

Vendor-managed Inventory Model with Time – limited Free Back – orders

LUO Bing, LU Na, YANG Shuai

(College of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing, 400030, China)

Abstract: Based on the VMI model with completely backlogging and without backlogging, the authors develop a new VMI model with partial backlogging and time – limited free back – orders, including a single vendor and multiple buyers. This model modifies the backlogging cost proposed by some documents, and takes account of the deterioration cost in the analysis of the total inventory cost. A numerical example and sensitivity analysis are presented to illustrate the model. The theoretical evidence is provided for VMI system to make management decision.

Key words: time – limited free back – orders; partial backlogging; VMI

(编辑 刘道芬)

(上接第138页)

Simulation of One Dimension Dam – break Flow ——Space – time Conservation Scheme

ZHANG Yong-xiang, CHEN Jing-qiu, WEI Chun-xia

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The new method of space – time conservation element and solution (CE/SE), developed by S. C. Chang, differs traditional numerical methods (finite – difference, finite – element, finite – volume, etc.). The CE/SE method treats space and time on the same footing, so that space and time are unified——a key characteristic that distinguishes the new method from other schemes. By the introduction of conservation element and solution element, both local and global flux conservation in space and time instead of in space only are enforced. Zhang Z C improved the method of space-time conservation element and solution element, which not only has all the features but also are simpler and easier to apply and have high accuracy and high resolution of discontinuities. The method of the improved scheme of space-time conservation element and solution element is used to simulate the 1-D unsteady open channel flow of sudden dam break. The calculation results are compared with analytic solutions. It is demonstrated that higher accuracy, good stability are obtained and good shock-capturing ability is shown.

Key words: dam-break; saint-venant equations; space-time conservation; surge

(编辑 张小强)