

文章编号:1000-582X(2005)08-0068-03

# DFT 在二维 DOA 估计的 MUSIC 法中的应用\*

曾浩,谭晓衡,杨士中,刘玲  
(重庆大学通信工程学院,重庆 400030)

**摘要:**波达方向 DOA 估计(Direction Of Arrival)广泛应用于各种空间滤波系统中,而 MUSIC 算法是 DOA 估计中的经典和实用的算法.但由于算法中需要进行各种矩阵运算,其计算量相当大.笔者提出了在阵元数为  $2^i$  的均匀圆阵中,利用数据的循环特性,采用 DFT(Discrete Fourier Transform)的计算方法,完成 MUSIC 法的空间谱函数二维谱峰搜索.同时,分析了该方法相对于传统 MUSIC 法谱峰搜索时计算量的改进,给出了仿真结果.改进后的 MUSIC 算法计算量可以减少到传统算法计算量的一半.

**关键词:**二维 DOA 估计;MUSIC 法;离散傅里叶变换;计算量

**中图分类号:**TN929

**文献标识码:**A

在阵列信号处理中,快速的 DOA 估计(Direction Of Arrival)是一个主要目的. MUSIC 法是一种经典的超分辨率方法<sup>[1-2]</sup>,但由于算法计算量较大,实现需要相当时间.在阵元数为  $2^i$  的均匀圆阵前提下,文献[3]提出利用数据的循环特性,通过 DFT 可以使一维 DOA 估计时 MUSIC 法的计算量减少到 30%~40%.在实际运用中,通常需要对二维 DOA 进行估计,笔者对 DFT 在二维处理中的应用和性能分析进行了讨论,结果表明,这种快速计算方法可以使计算量减少到 50% 左右.

## 1 均匀圆阵中二维 DOA 估计的 MUSIC 法

如图 1 所示<sup>[4]</sup>,阵元数为  $M$  的均匀圆阵,第  $m$  个阵元的方向矢量可以表示为  $\mathbf{r} = (R\sin\phi_m, R\cos\phi_m, 0)$ ,其中  $R$  为阵列半径,而  $\phi_m = 2\pi \frac{m}{M}$  为第  $m$  个阵元与  $x$  轴反时针夹角.如果空间有  $K(K < M)$  个远场波,且假设是不相关的窄带信源,用复基带表示为  $\mathbf{s}(t) = [s_0(t), \dots, s_{K-1}(t)]^T$ ,则由图 2 可知,各个阵元接收信号可以表示为

$$\begin{bmatrix} x_0(t) \\ \dots \\ x_{M-1}(t) \end{bmatrix} = [\mathbf{a}(\alpha_0, \beta_0), \dots, \mathbf{a}(\alpha_{K-1}, \beta_{K-1})] \cdot \begin{bmatrix} s_0(t) \\ \dots \\ s_{K-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_0(t) \\ \dots \\ n_{K-1}(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{a}(\alpha_k, \beta_k) = [a_0(\alpha_k, \beta_k), \dots, a_{M-1}(\alpha_k, \beta_k)]^T,$$

$$a_m(\alpha_k, \beta_k) = e^{j\frac{2\pi R m \sin\beta_k \cos(\alpha_k - \phi_m)}{\lambda}},$$

其中,  $\mathbf{a}(\alpha_k, \beta_k) = [a_0(\alpha_k, \beta_k), \dots, a_{M-1}(\alpha_k, \beta_k)]^T$  为第  $k$  个信源的导引矢量,  $n_m$  是阵元  $m$  上的高斯白噪声,具有相同的方差  $\sigma^2$ .在 MUSIC 法中,接收信号的协方差矩阵为  $\mathbf{R}$ ,其特征值为  $\sigma^2 = \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{M-K-1} < \lambda_{M-K} < \lambda_{M-K+1} < \dots < \lambda_{M-1}$ ,  $M-K$  个相等的最小特征值对应噪声空间特征值,具有特征向量  $\mathbf{v}_p, 0 \leq p \leq M-K-1$ ,噪声子空间投影为:

$$\hat{\Pi}^\perp = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{M-K-1}][\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{M-K-1}]^H = \mathbf{V}\mathbf{V}^H, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_p = [e_0^p, e_1^p, \dots, e_{M-1}^p]^T.$$

空间谱函数定义为<sup>[5]</sup>:

$$P_{\text{MUSIC}} = \frac{\mathbf{a}^H(\alpha, \beta)\mathbf{a}(\alpha, \beta)}{\mathbf{a}^H(\alpha, \beta)\hat{\Pi}^\perp\mathbf{a}(\alpha, \beta)}, \quad (3)$$

对式(3)在二维空间进行谱峰搜索  $\alpha \in [0, 2\pi], \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,当  $(\alpha, \beta) = (\alpha_k, \beta_k)$  时,可以得到  $K$  个峰值,即为  $K$  个信源的二维 DOA.

传统的二维搜索方法是计算  $(\alpha_i, \beta_q)$  时式(3)的值,水平角步进为  $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{I}$ ,俯仰角步进为  $\Delta\beta = \frac{2\pi}{Q}$ ,即

$$\alpha_i = i\Delta\alpha, \quad 0 \leq i \leq I-1, \quad (4)$$

$$\beta_q = q\Delta\beta, \quad 0 \leq q \leq Q-1. \quad (5)$$

共有  $I \times Q$  个点,然后找出其中的  $K$  个最大值为谱峰.可见, MUSIC 法计算量主要集中在特征值和特征向量

\* 收稿日期:2005-04-01

基金项目:重庆市应用基础项目(305123253);重庆大学研究生教育创新基金资助项目(040311)

作者简介:曾浩(1977-),男,四川泸州人,重庆大学博士研究生,研究方向:阵列信号处理,软件无线电技术.

求解,谱峰搜索两个部分.

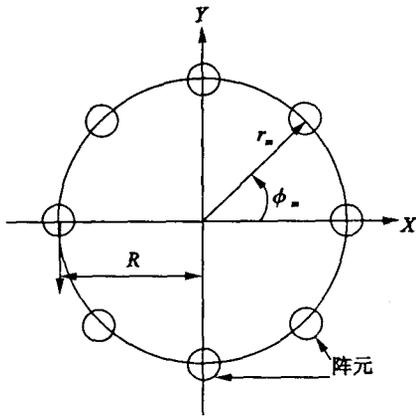


图 1 均匀圆阵分布图

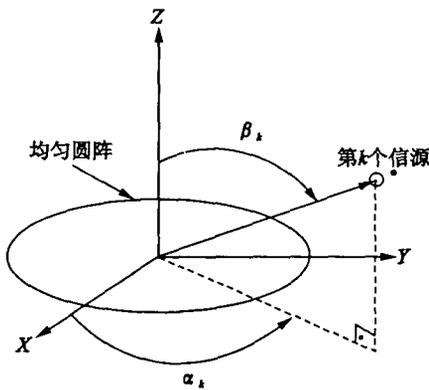


图 2 第  $k$  个信号示意图

## 2 DFT 的应用

二维搜索的基本方法是首先确定俯仰角  $\beta_q$ , 然后转化为对水平角  $\alpha$  的一维搜索. 由空间谱函数(3)的结构, 谱峰搜索时主要计算是分母表达式中的内积运算, 基本的运算表示为  $\mathbf{a}(\alpha_i, \beta_q) \mathbf{v}_p, 0 \leq p \leq M - K - 1$ , 所以一维搜索的基本计算可以表示为

$$\begin{matrix} P(\alpha_0, \beta_q) \\ P(\alpha_1, \beta_q) \\ \dots \\ P(\alpha_{l-1}, \beta_q) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\alpha_0, \beta_q) \\ \mathbf{a}^H(\alpha_1, \beta_q) \\ \dots \\ \mathbf{a}^H(\alpha_{l-1}, \beta_q) \end{bmatrix} \mathbf{v}_p = \mathbf{B} \mathbf{v}_p, \quad (6)$$

其中矩阵  $\mathbf{B}$  是  $l \times M$  维,  $\mathbf{v}_p$  是  $M$  维列向量, 此时,  $l$  为  $M$  整数倍.

$$b_{im} = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_q r_m \cos(\alpha_i - \phi_m)} = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_q r_m \cos(\gamma_{im})}. \quad (7)$$

由  $\alpha_i, \phi_m$  的定义知

$$\begin{aligned} \cos \gamma_{[i+(l/M)]_L, [m]_M} &= \cos \gamma_{[i]_L, [m-1]_M}, \\ b_{[i+(l/M)]_L, [m]_M} &= b_{[i]_L, [m-1]_M}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $[\ ]_L$  表示对  $L$  求模. 式(8)表明, 矩阵  $\mathbf{B}$  的数据共  $l$  行, 按行分成  $M$  个子矩阵, 每个子矩阵  $l/M$  行, 各个子矩阵的相同行数据相同, 只是循环分布, 所以, 矩阵  $\mathbf{B}$  的不同元素为  $l$  个, 例如:  $M=4, l=8$ , 矩阵  $\mathbf{B}$  的不同元素有 8 个, 定义为  $b_0, b_1, \dots, b_7$ , 矩阵  $\mathbf{B}$  为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 & b_6 & b_4 & b_2 \\ b_1 & b_7 & b_5 & b_3 \\ b_2 & b_0 & b_6 & b_4 \\ b_3 & b_1 & b_7 & b_5 \\ b_4 & b_2 & b_0 & b_6 \\ b_5 & b_3 & b_1 & b_7 \\ b_6 & b_4 & b_2 & b_0 \\ b_7 & b_5 & b_3 & b_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_6 & b_4 & b_2 \\ b_2 & b_0 & b_6 & b_4 \\ b_4 & b_2 & b_0 & b_6 \\ b_6 & b_4 & b_2 & b_0 \\ b_1 & b_7 & b_5 & b_3 \\ b_3 & b_1 & b_7 & b_5 \\ b_5 & b_3 & b_1 & b_7 \\ b_7 & b_5 & b_3 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}.$$

为了计算编程和说明方便, 进一步把  $\mathbf{B}$  中各个子矩阵相同行合并成新的矩阵  $\mathbf{C}$  的一个子矩阵  $\mathbf{C}_j, 0 < j \leq l/M$ , 共  $l/M$  个.

式(6)可以变换为  $\mathbf{C} \mathbf{v}_p$ , 显然,  $\mathbf{C}$  与  $\mathbf{v}_p$  的积可以通过各个  $\mathbf{C}$  的子矩阵  $\mathbf{C}_j$  与  $\mathbf{v}_p$  的积计算, 而从  $\mathbf{C}_j$  元素结构知, 这实际上是循环卷积的运算. 根据数字信号处理的基本性质, 循环卷积可以通过 DFT 的乘积求解, 从而大大减少运算量. 具体步骤为:

1) 估计协方差矩阵  $\mathbf{R}$ , 并计算出该矩阵的  $M - K$  个最小特征值和对应特征矢量  $\mathbf{v}_p$ , 取  $\mathbf{v}_0$ , 并对该矢量进行 DFT;

2) 确定  $\beta_0$ , 求出  $\mathbf{B}$ , 并且转换为  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}$  由  $l/M$  个子矩阵组成  $\mathbf{C}_j$ , 求解第 1 个子矩阵第 1 行元素的 DFT;

3) 把上两步的结果对应元素相乘, 得到一个  $M$  维列向量. 重复第 2 步, 完成所有  $\mathbf{C}$  的子矩阵处理, 得到一个  $l/M$  个  $M$  维列向量.

4) 对  $l/M$  个  $M$  维列向量进行 IDFT, 得到的结果构成一个  $l$  维列向量, 对其按照  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$  的变换逆顺序, 变换元素位置, 使之与  $\mathbf{B}$  对应. 得到的结果即为  $\mathbf{B} \mathbf{v}_0$ .

5) 取不同的  $\mathbf{v}_p, p=1, 2, \dots, M - K - 1$ , 得到  $\beta_0$  下的各个  $\mathbf{B} \mathbf{v}_p$ .

6) 取不同的  $\beta_q, q=1, 2, \dots, Q - 1$ , 重复第 2 步到第 5 步, 得到  $\mathbf{B} \mathbf{V}$ , 代入式(3), 去比较得出  $K$  个最大谱峰和相应的  $(\alpha_k, \beta_k)$ .

## 3 计算量分析

FFT 是计算 DFT 的基本方法, 计算量可以大幅减少<sup>[6]</sup>. 从上节内容分析可以知道, 在二维 DOA 估计中引入 FFT, 主要作用在于通过减少谱峰搜索计算量来改善 MUSIC 法整体性能. 对于传统的 MUSIC 法进行二维 DOA 搜索, 式(3)的分母计算量可以表示为复数加的次数和复数乘的次数两个参考指标.  $\mathbf{a}^H(i\Delta\alpha, q\Delta\beta)$  为  $1 \times M$  矩阵,  $\mathbf{V}$  为  $M \times (M - K)$  矩阵, 则可以得表 1 的统计数据:

表 1 传统 MUSIC 法计算量统计表

计算表达式	复数加次数	复数乘次数
$\mathbf{a}^H(i\Delta\alpha, q\Delta\beta) \mathbf{V}$	$(M - 1) \times (M - K)$	$M \times (M - K)$ 一个点
$\mathbf{V}^H \mathbf{a}(i\Delta\alpha, q\Delta\beta)$	$(M - 1) \times (M - K)$	$M \times (M - K)$
$(\alpha_i, \beta_q)$ 一个点	$(2M - 1) \times (M - K)$	$(2M + 1) \times (M - K)$
分母全部计算量	$(2M - 1) \times (M - K) \times I \times Q$	$(2M + 1) \times (M - K) \times I \times Q$

而改进方法中,通过 DFT 计算各个点  $(i\Delta\alpha, q\beta)$  函数值. 矩阵  $C$  由  $I/M$  个  $M \times M$  的子矩阵  $C_j$  组成,对于

每个特征矢量  $v_p$  就对应  $I/M$  组两个  $M$  长序列的圆周卷积. 若 DFT 采用 FFT 方式,计算量统计数据如表 2.

表 2 改进方法的计算量统计表

计算表达式	复数加次数	复数乘次数
$FFT(v_p)$	$M \log_2 M$	$\frac{M}{2} \log_2 M$
$FFT(C_j \text{ 第一行元素})$	$M \log_2 M$	$\frac{M}{2} \log_2 M$
$FFT(Cv_p)$	$(I+M) \log_2 M$	$(\frac{I}{2} \frac{M}{2}) \log_2 M + I$
$FFT(CV)$	$(I+M(M-K)) \log_2 M$	$(\frac{I}{2} \frac{M}{2} (M-K)) \log_2 M + I(M-K)$
$CV$	$(I+M(M+K)(M-K)) \log_2 M$	$(I \frac{I+M}{2} (M-K)) \log_2 M + I(M-K)$
$V^H C^H$	$(I+(I+M)(M+K)(M-K)) \log_2 M$	$(I \frac{I+M}{2} (M-K)) \log_2 M + I(M-K)$
$BVB^H B^H$	$2(I+M(M+K)(M-K)) \log_2 M + I(M-K-1)$	$(2I+(I+M)(M-K)) \log_2 M + 3I(M-K)$
分母全部计算量	$2Q(I+M(M+K)(M-K)) \log_2 M + IQ(M-K-1)$	$(2I+(I+M)(M-K)) Q \log_2 M + 3IQ(M-K)$

### 4 仿真结果

在阵元数  $M=8$  时,取定  $Q=100$ ,图 3 和图 4 分别表示了信源数  $K$  取不同情况下复数加和复数乘的计算量大小. 虚线代表传统方法,而实线代表改进方法. 实际计算中, $I$  应该是  $M$  的整数倍.

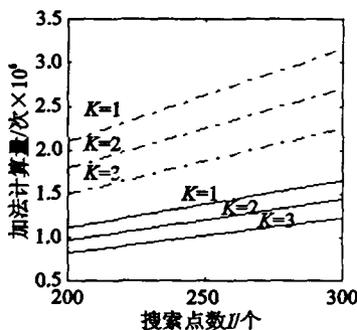


图 3 复数加计算量

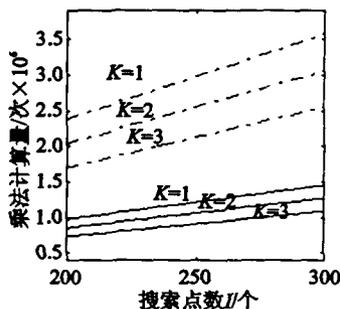


图 4 复数乘计算量

从仿真结果看出,采用 FFT 的方法,计算量减少

大约一半,而且,随着步长的增加,性能改善越好.

### 5 结论

缩短 DOA 估计的时间,是完成实时阵列信号处理的关键. 均匀圆阵是二维 DOA 估计时常采用的阵列形式,利用数据的循环特性,引入 FFT 工具,可以大大减少 MUSIC 法的谱峰搜索计算量. 该方法既可以用于终端定位,也可以用于波束合成.

#### 参考文献:

- [1] SCHMIDT R. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation [J]. Antennas and Propagation, 1986, 34 (3):276-280.
- [2] STOICA P, NEHORAI A. MUSIC Maximum Likelihood and Cramer-Rao Bound [J]. Acoustics Speech and Signal Processing, 1988, 37(5):2 296-2 299.
- [3] KAZUFUMI HIRATA. A Fast Computation Algorithm for DOA Evaluation Function of MUSIC Algorithm in Circular Array Antennas [J]. Electronics and Communications in Japan (Part I:communications), 2001, 84(8):62-69.
- [4] CHAN A Y J, LITVA J. MUSIC and maximum likelihood techniques on two-dimensional DOA estimation with uniform circular array [J]. Radar, Sonar and Navigation, 1995, 142(3):105-114.
- [5] 张贤达, 保铮. 通信信号处理 [M]. 北京:国防工业出版社, 2002. 236-240.
- [6] 程佩青. 数字信号处理教程 [M]. 北京:清华大学出版社, 1998. 222-223.

## Exact Integration of Constant Element of Elastomer in Boundary Element Method

YUAN Zheng-qiang<sup>1</sup>, YUAN Fei<sup>1</sup>, ZHU Jia-lin<sup>2</sup>

(1. College of Civil Engineering;

2. College of Mathematical and Physical Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** The boundary integral in Boundary Element Method affects the precision and the speed of the method. If the boundary integral with constant element, the nonsingular integrals are popularly calculated by the Gauss numerical integral, and the singular integrals are popularly calculated by the analytical integral. This paper presents an alternative way with Gauss formula to transform the double integral in elastic problem on 3-d into the linear integrals on the boundary of each subdomains, so that all the singular integrals and nonsingular integrals are calculated by analytical method. The example indicates that this method makes the precision and the speed of BEM improve.

**Key words:** boundary element method; constant element; exact integral

(编辑 姚 飞)

---

(上接第 70 页)

## Application of DFT In the 2-D DOA Evaluation of MUSIC

ZENG Hao, TAN Xiao-heng, YANG Shi-zhong, LIU Ling

(College of Communication Engineering Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** In many special filtering system, the direction of arrival(DOA) should be evaluated for the received signal. MUSIC algorithms is a classic one and is applied widely, but its computing load is very large because there exist many transforms of matrix. As the number of uniform circle is, the data are cyclic in the searching of peak in MUSIC algorithm for 2-D evaluation of DOA. The authors discuss how to use DFT to reduce the computation load. At the same time, the simulation of performance shows that the proposed algorithm improves the efficiency by fifty percent, that is important for the project reality.

**Key words:** 2-D evaluation of DOA; MUSIC; DFT; computation load

(编辑 吕赛英)