

文章编号:1000 - 582X(2005)08 - 0074 - 05

三维弹性体边界元常单元的精确积分计算

袁政强¹,袁 飞¹,祝家麟²

(重庆大学 1. 土木工程学院; 2. 数理学院,重庆 400030)

摘 要:边界元方法中的边界积分计算影响计算精度和计算速度. 当采用常单元计算时,非奇异积分一般采用数值积分,奇异积分采用精确积分法. 文章采用积分区域变换和高斯公式,将三维弹性问题的二维积分化为一维积分,使常单元奇异积分和非奇异积分都能采用精确积分的方法计算. 实例计算结果表明,此算法能使边界积分的求解精度和计算速度都得到提高.

关键词:边界元;常单元;精确积分

中图分类号:O172.2

文献标识码:A

偏微分方程是工程计算中常遇到的方程,求解偏微分方程的主要方法有:有限元法、有限差分法和边界元法. 近年来,边界元法由于精度高、速度快、处理复杂边界能力强等优点,在求解椭圆线性偏微分方程中得到广泛应用. 但是,边界元离散化后得到的线性方程组一般是稠密的,即刚度矩阵的每一个元素都需经积分算出. 对弹性体三维问题,需在每个边界单元内作二重积分.

边界元的积分一般分为 2 类:即当配置点在计算单元内的奇异积分,奇异积分采用精确积分和同行非奇异积分求和得到;非奇异积分普遍采用高斯型求积方法. 当配置点十分接近当前积分元时,由于积分核接近奇异而导致高斯点与计算量同步地急剧增加,更加重了积分计算量. 为了减少积分计算量,已有许多成果. 主要的有多项式坐标变换法^[1],梯度求积法^[2],边界轮廓法^[3],参数化方法^[4],也可以采用柯西奇异积分的积分方法^[5],文献[6]中提出了一种新的半解析积分法,用于边界元公式中的对数奇异和几乎奇异的计算,文献[7]中给出了仅以线弹性连续体的边界离散的节点或顶点的未知物理量为基础建立的间接边界元公式. 其基本思想在于尽可能地减少高斯点,从而达到减少积分计算量的目的. 关于奇异积分的计算还可见文献[8].

作者采用二重积分的坐标变换方法和张量与向量的关系式,给出了奇异单元的精确积分方法,用它可实

现三角形常单元的二重积分精确计算.

1 边界元计算中的积分

应用弹性理论中 Betti 功的互换定理和弹性问题的基本解,可将混合边界条件的线弹性问题的控制微分方程转化为如下的边界积分方程:

$$C_{ik}w_k^i + \int_{\Gamma} P_{ik}^* w_k d\Gamma = \int_{\Gamma} w_{ik}^* P_k d\Gamma, \quad (1)$$

其中: w_{ik}^* , P_{ik}^* ($i, k = 1, 2, 3$) 为基本解, Γ 是区域边界,配置点取在边界上, C_{ik} 是与配置点几何形状相关的常数. 弹性问题的基本解为:

$$w_{ik}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ik} + r_{,i}r_{,k}] = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r^3} \right]; \quad (2)$$

$$P_{ik}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_{,i}r_{,k}] - (1-2\nu)(r_{,i}n_k - r_{,k}n_i) \right\} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)(r_{,j}n_j\delta_{ik} - r_{,i}n_k + r_{,k}n_i) + 3r_{,j}n_jr_{,i}r_{,k}] = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \left(\frac{-d}{r^3}\delta_{ik} - \frac{x_i - y_i}{r^3}n_k + \frac{x_k - y_k}{r^3}n_i \right) + \right.$$

• 收稿日期:2005 - 04 - 15

基金项目:国家科技部国际科技合作重点项目(2004DFA06400)

作者简介:袁政强(1962 -),男,贵州贵阳人,重庆大学副研究员,主要从事计算数学和钢筋混凝土结构分析.

$$3 \frac{(-d)(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^5} \Big], (l, k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

其中: δ_{lk} 是克罗内克 (Kronecker) 符号, 它的定义是

$$\delta_{lk} = \begin{cases} 1, & l = k; \\ 0, & l \neq k. \end{cases}$$

$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$, d 是源点到单元平面的距离, 见图 1.

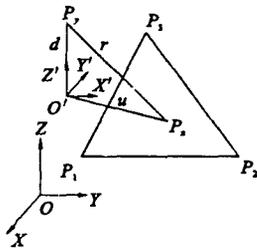


图 1 空间坐标变换

将区域的边界剖分成 N 个边界三角形单元. 采用常单元时, 单元内只在形心有一个配置点, 且在单元内都是常数. 这样, 边界上的全部节点数和全部单元数是相等的.

设 w_i 在 P_i 是边界密度函数 w 与 P 在第 i 个单元结点处的函数值, 则式 (1) 离散化为以下的线性方程组:

$$C_i w_i + \sum_{j=1}^N H'_{ij} w_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j, i = 1, 2, \dots, N. \tag{4}$$

其中:

$$H'_{ij} = \int_{\Gamma_j} P^* d\Gamma, G_{ij} = \int_{\Gamma_j} w^* d\Gamma, i, j = 1, 2, \dots, N. \tag{5}$$

Γ_j 是第 j 个边界单元.

2 积分变换及精确积分公式

对于三维空间问题, 边界三角形单元由空间不在一直线上的三点组成, 设这三点的坐标为: $P_1(x_1^1, x_{12}, x_{13}), P_2(x_1^2, x_{22}, x_{23}), P_3(x_1^3, x_{32}, x_{33})$. 在三角形单元上建立新的直角坐标系, 新坐标系的 X 方向为 P_1 到 P_2 的单位方向, Z 方向为 $P_1 P_2 P_3$ 平面平面的法线方向, Y 方向是 Z 方向叉乘 X 方向. 新坐标系的原点取在源点 $X(x_1, x_2, x_3)$ 在平面的垂直投影点 $X_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ 处. 平面上任意点 $P(y_1, y_2, y_3)$ 在新坐标系下的坐标是 (u, v, w) , 在平面上 $w = 0$. P 点到原点的矢量 $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$ 在新坐标系下的坐标变换公式是:

$$\begin{cases} u - 0 \\ v - 0 \\ 0 - d \end{cases} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{cases} = T \begin{cases} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{cases}. \tag{6}$$

其中: 变换矩阵 T 的第一行是 X' 方向在旧坐标系中的坐标, 即向量 $(x_1^2 - x_1^1, x_2^2 - x_2^1, x_3^2 - x_3^1)$ 的单位向量; 变换矩阵的第三行是 Z' 方向在旧坐标系中的坐标, 即向量 $(x_1^2 - x_1^1, x_2^2 - x_2^1, x_3^2 - x_3^1)$ 叉乘向量 $(x_1^2 - x_1^1, x_2^2 - x_2^1, x_3^2 - x_3^1)$ 的单位向量; 变换矩阵 T 的第二行是 Y' 方向在旧坐标系中的坐标, 即 Z 方向叉乘 X 方向.

由式 (6) 得到式 (5) 中的下列项

$$\frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^3} = T^T \begin{bmatrix} u^2/r^3 & uv/r^3 & -ud/r^3 \\ uv/r^3 & v^2/r^3 & -vd/r^3 \\ -ud/r^3 & -vd/r^3 & d^3/r^3 \end{bmatrix} T, \tag{7}$$

$$\frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^5} = T^T \begin{bmatrix} u^2/r^5 & uv/r^5 & -ud/r^5 \\ uv/r^5 & v^2/r^5 & -vd/r^5 \\ -ud/r^5 & -vd/r^5 & d^3/r^5 \end{bmatrix} T, \tag{8}$$

$$\frac{(x_l - y_l)n_k}{r^3} - \frac{(x_k - y_k)n_l}{r^3} = T^T \begin{bmatrix} u/r^3 \\ v/r^3 \\ -d/r^3 \end{bmatrix} (n_1 \ n_2 \ n_3) -$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} (u/r^3 \ v/r^3 \ -d/r^3) T. \tag{9}$$

在新坐标系下, 原来的空间积分变为了二维平面积分, 原来的积分变量 r 用积分变量 u, v 和 d 代替, 它们的关系是 $r^2 = u^2 + v^2 + d^2 = \rho^2 + d^2$, d 是配置点到单元平面的距离.

先考虑一种特殊情况的积分, 即当配置点在新坐标系 $X'Y'$ 平面的投影点 P_0 就是 P_3 时, 以 P_0 为坐标原点作平面坐标变换, 如图 2, Y'' 方向与 $P_1 P_2$ 方向相同, X'' 方向是 $P_1 P_2$ 边界方向的外法向. 在新坐标系下,

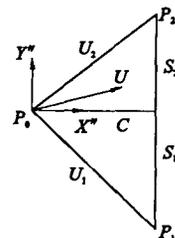


图 2 平面坐标变换

式 (5) 的两项积分变为:

$$\begin{aligned} R1 &= \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r} dS, & R3 &= \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r^3} dS, & R5 &= \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r^5} dS, \\ UR1 &= \int_{\Gamma_e} \frac{u}{r} dS, & UR3 &= \int_{\Gamma_e} \frac{u}{r^3} dS, & U2R3 &= \int_{\Gamma_e} \frac{u^2}{r^3} dS, \\ VR3 &= \int_{\Gamma_e} \frac{v}{r^3} dS, & V2R3 &= \int_{\Gamma_e} \frac{v^2}{r^3} dS, & UVR3 &= \int_{\Gamma_e} \frac{uv}{r^3} dS, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U2R5 &= \int_{r_i} \frac{u^2}{r^5} dS, & UVRS &= \int_{r_i} \frac{uv}{r^5} dS, & V2R5 &= \int_{r_i} \frac{v^2}{r^5} dS, \\ URS &= \int_{r_i} \frac{u}{r^5} dS, & VR1 &= \int_{r_i} \frac{v}{r} dS, & VR5 &= \int_{r_i} \frac{v}{r^5} dS. \end{aligned} \quad (10)$$

以上积分可以直接采用精确积分:

$$\begin{aligned} UR1 &= \int_{r_i} \frac{u}{r} dudv = \int_{r_i} \frac{\partial r}{\partial u} dudv = \oint_{\partial r_i} r dv, \\ UR3 &= - \int_{r_i} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r} \right) dudv = \oint_{\partial r_i} \frac{1}{r} dv, \\ U2R3 &= \int_{r_i} \frac{u^2}{r^3} dudv = \int_{r_i} \frac{1}{r} dudv - \\ &\int_{r_i} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{r} \right) dudv = \int_{r_i} \frac{1}{r} dudv - \oint_{\partial r_i} \frac{1}{r} dv, \\ UVR3 &= \int_{r_i} \frac{uv}{r^3} dudv = - \int_{r_i} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v}{r} \right) dudv = - \oint_{\partial r_i} \frac{v}{r} dv, \\ URS &= \int_{r_i} \frac{u}{r^5} dudv = - \frac{1}{3} \int_{r_i} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r^3} \right) dudv = - \frac{1}{3} \oint_{\partial r_i} \frac{1}{r^3} dv, \\ U2RA5 &= \int_{r_i} \frac{u^2}{r^5} dudv = \frac{1}{3} \left(\int_{r_i} \frac{1}{r^3} dudv - \right. \\ &\left. \int_{r_i} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{r^3} \right) dudv \right) = \frac{1}{3} \left(\int_{r_i} \frac{1}{r^3} dudv - \oint_{\partial r_i} \frac{u}{r^3} dv \right), \\ UVR5 &= \int_{r_i} \frac{uv}{r^5} dudv = - \frac{1}{3} \int_{r_i} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{r^3} \right) dudv = \frac{1}{3} \oint_{\partial r_i} \frac{v}{r^3} du. \end{aligned} \quad (11)$$

线积分是对三角形三边, 对各边的积分作参数变换

$$\begin{aligned} u &= u_i + t(u_{i+1} - u_i), \\ v &= v_i + t(v_{i+1} - v_i). \end{aligned} \quad (12)$$

则得

$$\begin{aligned} UR1 &= \sum_{i=1}^3 (v_{i+1} - v_i) \int_0^1 \sqrt{at^2 + bt + c} dt, \\ UR3 &= \sum_{i=1}^3 (v_{i+1} - v_i) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{at^2 + bt + c}} dt, \\ U2R3 &= R1 - \sum_{i=1}^3 (v_{i+1} - v_i) \int_0^1 \frac{u_i + t(u_{i+1} - u_i)}{\sqrt{at^2 + bt + c}} dt, \\ UVR3 &= - \sum_{i=1}^3 (v_{i+1} - v_i) \int_0^1 \frac{u_i + t(v_{i+1} - v_i)}{\sqrt{at^2 + bt + c}} dt, \\ URS &= - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (v_{i+1} - v_i) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(at^2 + bt + c)^3}} dt, \\ U2R5 &= \frac{1}{3} [R3 - \sum_{i=1}^3 (v_{i+1} - v_i) \int_0^1 \frac{u_i + t(u_{i+1} - u_i)}{\sqrt{(at^2 + bt + c)^3}} dt], \\ V2R5 &= R3 \left(\frac{2}{3} - d^2 \right) + \\ &\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (v_{i+1} - v_i) \int_0^1 \frac{u_i + t(u_{i+1} - u_i)}{\sqrt{(at^2 + bt + c)^3}} dt, \\ UVR5 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (u_{i+1} - u_i) \int_0^1 \frac{v_i + t(v_{i+1} - v_i)}{\sqrt{(at^2 + bt + c)^3}} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } a &= (u_{i+1} - u_i)^2 + (v_{i+1} - v_i)^2, \\ b &= 2[u_i(u_{i+1} - u_i) + v_i(v_{i+1} - v_i)], \\ c &= u_i^2 + v_i^2 + d^2. \end{aligned}$$

同理可推得 VR1、VR3、V2R3、VR5 的表达式。

以上公式的计算实际上是如下的积分计算^[9]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{at^2 + bt + c}} dt &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{at^2 + bt + c} + \sqrt{at} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right) \Big|_0^1; \\ \int_0^1 \sqrt{at^2 + bt + c} dt &= \left\{ \frac{2at + b}{4a} \sqrt{at^2 + bt + c} + \right. \\ &\left. \frac{q}{8a\sqrt{a}} \ln \sqrt{at^2 + bt + c} + \sqrt{at} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right\} \Big|_0^1; \\ \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{at^2 + bt + c}} dt &= \left\{ \frac{1}{a} \sqrt{at^2 + bt + c} - \right. \\ &\left. \frac{b}{2a\sqrt{a}} \ln \sqrt{at^2 + bt + c} + \sqrt{at} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right\} \Big|_0^1; \\ \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{at^2 + bt + c}} dt &= \left\{ \left(\frac{t}{2a} - \frac{3b}{4a^2} \right) \sqrt{at^2 + bt + c} + \right. \\ &\left. \frac{3b - 4ac}{8a^2\sqrt{a}} \ln \sqrt{at^2 + bt + c} + \sqrt{at} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right\} \Big|_0^1; \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(at^2 + bt + c)^3}} dt &= \frac{2(2at + b)}{q\sqrt{at^2 + bt + c}} \Big|_0^1; \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(at^2 + bt + c)^3}} dt &= - \frac{2(bt + 2c)}{q\sqrt{at^2 + bt + c}} \Big|_0^1; \\ \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(at^2 + bt + c)^3}} dt &= \left\{ \frac{(2b^2 - 4ac)t + 2bc}{aq\sqrt{at^2 + bt + c}} + \right. \\ &\left. \frac{1}{a\sqrt{a}} \ln \sqrt{at^2 + bt + c} + \sqrt{at} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right\} \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (14)$$

R1、R3 和 R5 的计算分为 3 个三角形, 每个三角形上的计算采用图 2 的坐标变换. R1、R3 和 R5 的积分公式为^[10]:

$$\begin{aligned} R1 &= \int_{r_i} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} d\Gamma_e = |c| \ln(|c| \operatorname{tg} \theta + \\ &\sqrt{c^2 + d^2 \cos^2 \theta}) + |d| \arcsin \left(\frac{|d|}{\sqrt{c^2 + d^2}} \sin \theta \right) - |d| \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}; \\ R3 &= \int_{r_i} \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 + d^2)^3}} d\Gamma_e = \\ &\frac{1}{|d|} \left[\theta - \arcsin \left(\frac{|d|}{\sqrt{c^2 + d^2}} \sin \theta \right) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}; \\ R5 &= \int_{r_i} \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 + d^2)^3}} d\Gamma_e = \left\{ \frac{c^2 \sin \theta}{3d^2(c^2 + d^2)\sqrt{c^2 + d^2 \cos^2 \theta}} + \right. \\ &\left. \frac{1}{3|d|^3} \left[\theta - \arcsin \left(\frac{|d|}{\sqrt{c^2 + d^2}} \sin \theta \right) \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\theta_1 = \arctan \frac{s_1}{c}$, $\theta_2 = \arctan \frac{s_2}{c}$.

c, s_1, s_2 的含义见图 2.

d 为零时,由式(7)、(8)、(9)知 $R3$ 及与 $R5$ 相关的积分不必计算. $R1$ 的积分公式退化为

$$R1 = \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} d\Gamma_c = \frac{1}{2} |c| \ln \left(\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}, \quad (16)$$

其余的计算公式可作相应的退化计算. $UR3, VR3$ 的计算可以直接用 H 项的非奇异积分得到. 将常数函数代入(4)中得到

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (17)$$

$$H_{ii} = \sum_{j=1, i \neq j}^N H_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

3 算例

算例采用的半径为 1 m 的球体,弹性模量为 $3 \times 10^5 \text{ N/m}^2$,泊松比是 0.2,在其表面作用 750 kN/m^2 的静水压力,球面剖分为等边三角形边界单元. 分别采用三角形高斯 7 点数值积分和文中算法计算域内点的位移值. 具体参数与结果分别见表 1、表 2.

表 1 球体内点的坐标

内点	X	Y	Z	内点	X	Y	Z
P_1	0.2	0.0	0.0	P_4	0.5	0.0	0.0
P_2	0.0	0.6	0.0	P_5	0.3	0.4	0.0
P_3	0.0	0.0	0.7	P_6	0.3	0.5	0.8

表 2 球体内点的位移计算结果

内点	单元数	位移方向	本算法解	数值积分解	精确解
P_1	80	X	2.154 56E-007	2.172 03E-007	2.0E-07
		Y	1.323 49E-023	-1.153 22E-017	0.0
		Z	1.257 31E-022	-2.865 07E-017	0.0
P_2	80	X	8.404 16E-022	-2.88 591E-016	0.0
		Y	6.496 63E-007	6.548 87E-007	6.0E-007
		Z	2.878 59E-022	-1.421 94E-015	0.0
P_3	80	X	5.154 22E-022	1.244 69E-015	0.0
		Y	5.293 96E-023	2.397 81E-015	0.0
		Z	7.652 39E-007	7.713 33E-007	7.0E-007
P_4	80	X	5.394 36E-007	5.437 93E-007	5.0E-007
		Y	5.293 96E-023	1.300 28E-016	0.0
		Z	-8.867 38E-022	-4.260 52E-016	0.0
P_5	80	X	3.227 78E-007	3.254E-007	3.0E-007
		Y	4.310 79E-007	4.345 69E-007	4.0E-007
		Z	-1.935 6E-021	-1.289 67E-015	0.0
P_6	80	X	3.333 91E-007	3.359 77E-007	3.0E-007
		Y	5.528 25E-007	5.546 36E-007	5.0E-007
		Z	8.713 35E-007	8.743 23E-007	8.0E-007
P_1	320	X	2.051 99E-007	2.059 62E-007	2.0E-07
		Y	-6.766 34E-022	-1.623 59E-017	0.0
		Z	-7.481 85E-022	1.333 77E-017	0.0
P_2	320	X	1.493 89E-021	2.222 51E-017	0.0
		Y	6.157 65E-007	6.180 43E-007	6.0E-007
		Z	4.814 19E-022	-7.499 17E-016	0.0

续表 2

内点	单元数	位移方向	本算法解	数值积分解	精确解
P_3	320	X	-1.803 25E-022	5.512 88E-016	0.0
		Y	1.823 11E-021	1.346 78E-015	0.0
		Z	7.186 25E-007	7.212 72E-007	7.0E-007
P_4	320	X	5.130 64E-007	5.149 68E-007	5.0E-007
		Y	-1.702 34E-021	5.157 41E-017	0.0
		Z	-1.301 16E-021	-1.853 56E-016	0.0
P_5	320	X	3.077 28E-007	3.088 82E-007	3.0E-007
		Y	4.104 61E-007	4.119 83E-007	4.0E-007
		Z	-1.334 24E-021	-6.322 33E-016	0.0
P_6	320	X	3.181 21E-007	3.192 42E-007	3.0E-007
		Y	5.251 73E-007	5.293 79E-007	5.0E-007
		Z	8.586 63E-007	8.655 66E-007	8.0E-007

高斯积分只能用于非奇异积分计算. 剖分加密时,单元之间的距离减小,奇异性增加,数值积分解计算精度减小. 该算法的计算精度高于高斯积分的计算精度. 本算法解随着剖分加密精度提高.

图 1 中的坐标变换的坐标方向只与单元有关,坐标变换的原点与计算源点有关. 为加速计算,可以先计算出每个单元坐标变换的坐标方向.

参考文献:

- [1] 方诗圣,王建国,王秀喜. 对偶边界元法中对数奇异积分的计算[J]. 研究简报, 2002, 24(2): 283-285.
- [2] 饶翔,黄之初. 有势流边界积分方程奇点的简洁处理法[J]. 湖北汽车工业学院学报, 2000, 14(4): 18-22.
- [3] 周慎杰,孙树勋,曹志远. 弹性力学平面问题的等价边界积分方程的边界轮廓法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(2): 175-180.
- [4] 侯劲松,王泽毅. 边界元计算中一种新的积分方法[J]. 数值计算与计算机应用, 1999, 20(1).
- [5] HEIKO ANDRA. Integration of Singular Integrals for the Galerkin-type Boundary Element Method in 3D Elasticity [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 157: 239-249.
- [6] SLADEK V, SLADEK J, TANAKA M. Numerical Integration of Logarithmic and Nearly Logarithmic Singularity in BEMs [J]. Applied Mathematical Modelling, 2001, 25: 901-922.
- [7] VIJAYAKUMAR S, YACOUB T E, CURRAN J H. A Node-centric Indirect Boundary Element Method; Three-dimensional Displacement Discontinuities [J]. Computers & Structures, 2000, 74: 687-703.
- [8] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [9] 《数学手册》编写组. 数学手册 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [10] 袁政强,黄剑,祝家麟. 三维 Laplace 方程边界元中线性单元的精确积分法 [J]. 应用力学学报, 2004, 21(3): 117-120.

Exact Integration of Constant Element of Elastomer in Boundary Element Method

YUAN Zheng-qiang¹, YUAN Fei¹, ZHU Jia-lin²

(1. College of Civil Engineering;

2. College of Mathematical and Physical Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The boundary integral in Boundary Element Method affects the precision and the speed of the method. If the boundary integral with constant element, the nonsingular integrals are popularly calculated by the Gauss numerical integral, and the singular integrals are popularly calculated by the analytical integral. This paper presents an alternative way with Gauss formula to transform the double integral in elastic problem on 3-d into the linear integrals on the boundary of each subdomains, so that all the singular integrals and nonsingular integrals are calculated by analytical method. The example indicates that this method makes the precision and the speed of BEM improve.

Key words: boundary element method; constant element; exact integral

(编辑 姚 飞)

(上接第 70 页)

Application of DFT In the 2-D DOA Evaluation of MUSIC

ZENG Hao, TAN Xiao-heng, YANG Shi-zhong, LIU Ling

(College of Communication Engineering Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: In many special filtering system, the direction of arrival(DOA) should be evaluated for the received signal. MUSIC algorithms is a classic one and is applied widely, but its computing load is very large because there exist many transforms of matrix. As the number of uniform circle is, the data are cyclic in the searching of peak in MUSIC algorithm for 2-D evaluation of DOA. The authors discuss how to use DFT to reduce the computation load. At the same time, the simulation of performance shows that the proposed algorithm improves the efficiency by fifty percent, that is important for the project reality.

Key words: 2-D evaluation of DOA; MUSIC; DFT; computation load

(编辑 吕赛英)