2005 年 8 月 第 28 卷第 8 期
重庆大学学报(自然科学版)
Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)
Aug. 2005 Vol.28 No.8

文章编号:1000-582X(2005)08-0079-04

P-凸度量空间内广义压缩映射不动点的迭代*

田有先,谢声时
(重庆邮电学院 计算机学院,重庆 400065)

摘 要:在 P-凸度量空间内,对关于 p 的广义拟压缩映射定义了 Ishikawa 迭代序列,证明了 Ishikawa 迭代序列收敛于广义拟压缩映射的唯一不动点.这个结果推广和统一了 Liu Qin-hou, Xu Hong-kun, Ding Xie-ping, H. E. Rhoades,田有先,Tian you-xian and Chang Shi-sheng 等人的相应结果.

关键词:P-凸度量空间;广义拟压缩映射;Ishikawa 迭代格式;不动点
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A

1 引言及预备知识

1974 年,Ciric[1] 推广了 Banach 压缩原理,在完备度量空间证明了如下的不动点定理:

定理(见[1]) 设 (E,d) 是一完备的度量空间,$T:E\to E$ 是一拟压缩映象,即存在常数 $q\in[0,1)$ 使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant q\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(x,Ty),d(y,Tx),d(y,Ty)\}$$

对一切 $x,y\in E$,则 T 在 E 中有不动点,而且对任给的 $x_0\in E$,Picard 迭代序列 $\{T^nx_0\}$ 收敛于该不动点 x^*.

1976 年和 1983 年,Rhoades[2] 和 Naimpally-Singh[3] 提出了下面的公开问题:

公开问题(Rhoades-Naimpally-Singh):Ishikawa 迭代序列能否推广到度量空间中的非线性拟压缩映象?

这一问题在 Hilbert、Banach 空间和凸度量空间的框架下实际上已被肯定地解决[4-11].

1996 年,Kada 等[12] 在度量空间介绍了 W-距离的概念:

定义 1(见[12]) 函数 $p:E\times E\to[0,\infty)$ 称为 W-距离,如果

1) $p(x,z)\leqslant p(x,y)+p(y,z)$, $\forall x,y,z\in E$;

2) $\forall x\in E$, $p(x,\cdot)$, $E\to[0,\infty)$ 是下半连续;

3) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $p(z,x)\leqslant\delta$ 和 $p(z,y)\leqslant\delta$,就推出 $d(x,y)\leqslant\varepsilon$.

由定义 1 知,度量 d 是 W-距离,但其逆是不成立的.因为对于度量 d,定义 1 中的 1) 和 2) 显然是成立的.对 3),$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon/2$,则若 $d(z,x)\leqslant\delta$, $d(z,y)\leqslant\delta$,就有 $d(x,y)\leqslant d(z,x)+d(z,y)\leqslant\delta+\delta=\varepsilon$,故度量 d 是 W-距离.

Kada 等人给出 W-距离概念后,还证明了如下不动点定理:

定理 1(见[2]) 设 E 是一个完备度量空间,p 是一个 W-距离,$T:E\to E$ 是一个映射,若存在 $\gamma\in[0,1)$ 使得对每个 $x\in E$,有

$$p(Tx,T^2x)\leqslant\gamma p(x,Tx) \text{ 和 }$$
$$\inf\{p(x,y)+p(x,Tx):x\in E\}>0\qquad(y\neq Ty),$$

则 T 有唯一的不动点.此外若 $v=Tv$,则 $p(v,v)=0$.

笔者目的是利用 W-距离,推广凸度量空间到 P-凸度量空间,对关于 P 的广义拟压缩映射定义了 Ishikawa 迭代程序,并证明了广义拟压缩在 P-凸度量空间内有唯一不动点.这个结果推广和统一了文献[4-11]的相应结果.

定义 2 设 (E,d) 是一度量空间,p 是 E 上的 w-距离,$I=[0,1]$,映射 $W:E\times E\times I\to E$ 被称为 E 上的 P-凸结构,如果对每个 $(x,y,\lambda)\in E\times E\times I$ 和 $u\in E$,有

$$\begin{cases}1^\circ & p(u,W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda p(u,x)+(1-\lambda)p(u,y)\\ 2^\circ & p(W(x,y,\lambda),u)\leqslant\lambda p(x,u)+(1-\lambda)p(y,u),\end{cases}\tag{1}$$

具有 P-凸结构 W 的度量空间,称为 P-凸度量空间.记为 (E,d,p,W).

设 E 是 P-凸度量空间(W 为其 P-凸结构),设 K 是 E 之一子集,称 K 为 P-凸的,如果存在映射 $W:K\times K\times I\to K$ 是 K 上的 p-凸结构.

因为度量 d 是 W-距离,如果令 $p=d$,则凸度量空间是 P-凸度量空间,其 W-距离为 d.

定义 3 设 E 是 P-凸度量空间,$\{x_n\}$ 是 E 中的

* 收稿日期:2005-04-14
基金项目:重庆市教委自然科学基金资助项目(050308)
作者简介:田有先(1948-),男,四川宜汉人,重庆邮电学院教授,主研方向:不动点,变分不等式.

序列，则$\{x_n\}$称为收敛的，如果存在一点$x\in E$，使得$\forall\varepsilon>0$，存在一正整数n_0，当$n\geqslant n_0$时，有$p(x_n,x)<\varepsilon$. 记为$x_n\to x(n\to\infty)$或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

$\{x_n\}$称为E中的Cauchy列，如果$\forall\varepsilon>0$，存在正整数n_0，当$n,m\geqslant n_0$时，有$p(x_m,x_n)<\varepsilon$.

(E,d,p,W)称为是完备的p-凸度量空间，如果：①E是P-凸度量空间，②E中每一Cauchy列是收敛的.

定义4　设(E,d,p,W)是一p-凸度量空间，$T:E\to E$称为关于p的拟压缩映象，如果存在常数$q\in[0,1)$，使得对$\forall x,y\in E$，有

$$p(Tx,Ty)\leqslant q\max\{p(x,x),p(x,y),p(x,Tx),p(y,Ty),p(x,Ty),p(y,Tx),p(y,y),p(y,x),p(Tx,x),p(Ty,y),p(Ty,x),p(Tx,y)\}.\quad(2)$$

如果$p=d$，显然T就是通常的拟压缩映射.

定义5　一函数$\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty$称为满足条件$(\Phi)$，如果它是不减的，右连续的，$\Phi(t)<t$，$\forall t>0$，且$\Phi(0)=0$.

易于证明下面的

命题1　如果函数$\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$满足条件$(\Phi)$且$t\leqslant\Phi(t)$，$t\in[0,\infty)$，则$t=0$.

定义6　设(E,d,p,W)是一p-凸度量空间，$T:E\to E$称为关于p的广义拟压缩映象，如果存在满足条件(Φ)的函数$\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，使得对$\forall x,y\in E$，有

$$p(Tx,Ty)\leqslant\Phi(\max\{p(x,x),p(x,y),p(x,Tx),p(y,Ty),p(x,Ty),p(y,Tx),p(y,y),p(y,x),p(Tx,x),p(Ty,y),p(Ty,x),p(Tx,y)\}).\quad(3)$$

当$\Phi(t)=Kt$，$K\in[0,1)$则(3)等价于(2)，若再有$p=d$，则T就是通常的拟压缩映射.

2　主要结果

定理2　设(E,d,p,W)是完备的p-凸度量空间，$T:E\to E$是关于p的广义拟压缩映射. 序列$\{x_n\}$是按如下方式定义的Ishikawa迭代程序：

$$\begin{cases}x_0\in E,x_{n+1}=W(Ty_n,x_n,\alpha_n)\\ y_n=W(Tx_n,x_n,\beta_n)\qquad n=0,1,2,\cdots,\end{cases}\quad(4)$$

其中$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$满足$0\leqslant\alpha_n,\beta_n\leqslant1$，并且$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$发散，则$\{x_n\}$收敛于$T$在$E$中的唯一不动点.

证明：令N为一切非负整数的集合，对每一$n\in N$，记

$$D_{0,n}=\bigcup_{j=0}^{n}\{x_j,y_j,Tx_j,Ty_j\}.$$

$\delta(D_{0,n})=\sup\{p(u,v),p(v,u),u,v\in D_{0,n}\}$表示$D_{0,n}$的直径，由式(3)容易证明对任何$n\in N$

$$\max_{0\leqslant i,j\leqslant n}\{p(Tx_i,Tx_j),p(Tx_i,Ty_j),p(Ty_i,Ty_j),p(Tx_j,Tx_i),p(Ty_j,Ty_i),p(Ty_j,Tx_i)\}\leqslant\Phi(\delta(D_{0,n})).\quad(5)$$

现在证明对每一$n\in N$，

$$\delta(D_{0,n})=\max\{p(x_0,Tx_j),p(Tx_j,x_0),p(x_0,Ty_j),p(Ty_j,x_0):0\leqslant j\leqslant n\}.\quad(6)$$

为此分以下7步完成证明. 为方便不妨设$\delta(D_{0,n})\neq0$.

(i) 若$\delta(D_{0,n})=\{p(x_i,Tx_j):0\leqslant i,j\leqslant n\}$或者$\delta(D_{0,n})=\{p(Tx_j,x_i):0\leqslant i,j\leqslant n)\}$，在此情况，对于满足$0\leqslant k<j$，$0\leqslant l\leqslant j$的$k,l$有

$$\delta(D_{0,n})=p(x_{k+1},Tx_l)\text{或}\delta(D_{0,n})=p(Tx_l,x_{k+1}),$$

则由(1)，(4)和(5)，有

$$\begin{cases}\delta(D_{0,n})=p(W(Ty_k,x_k,\alpha_k),Tx_l)\quad(A)\\ \delta(D_{0,n})=p(Tx_l,W(Ty_k,x_k,\alpha_k))\quad(B)\end{cases},$$

对(A)有

$$\delta(D_{0,n})\leqslant\alpha_kp(Ty_k,Tx_l)+(1-\alpha_k)p(x_k,Tx_l)\leqslant\alpha_k\Phi(\delta(D_{0,n}))+(1-\alpha_k)p(x_k,Tx_l),$$

因Φ满足条件(Φ)，即当$\delta(D_{0,n})>0$，有$\Phi(\delta(D_{0,n}))<\delta(D_{0,n})$，(见定义5)，所以

$$\delta(D_{0,n})\leqslant\alpha_k\delta(D_{0,n})+(1-\alpha_k)p(x_k,Tx_l),$$

注意到$\delta(D_{0,n})\neq0$，由此推得或者此情形不可能，或者$\alpha_K=0$，若为后者则$\delta(D_{0,n})=p(x_k,Tx_l)$，由归纳法得$\delta(D_{0,n})=p(x_0,Tx_l)$，故(6)式成立. 对于(B)有

$$\delta(D_{0,n})\leqslant\alpha_kp(Tx_l,Ty_k)+(1-\alpha_k)p(Tx_l,x_k)\leqslant\alpha_k\Phi(\delta(D_{0,n}))+(1-\alpha_k)p(Tx_l,x_k),$$

同(A)的讨论，得到$\delta(D_{0,n})=p(Tx_l,x_K)$，由归纳法得到$\delta(D_{0,n})=p(Tx_l,x_0)$，故(6)仍成立.

(ii) 若$\delta(D_{0,n})=\{p(x_i,Ty_j):0\leqslant i,j\leqslant n\}$或者$\delta(D_{0,n})=\{p(Ty_j,x_i):0\leqslant i,j\leqslant n\}$，用类似(i)的方法可证得$\delta(D_{0,n})=p(x_0,Ty_l)$或$\delta(D_{0,n})=p(Ty_l,x_0)$，其中$0\leqslant l\leqslant j$. 因此式(6)成立.

(iii) 若$\delta(D_{0,n})=\{p(y_i,Tx_j):0\leqslant i,j\leqslant n\}$或者$\delta(D_{0,n})=\{p(Tx_j,y_i):0\leqslant i,j\leqslant n\}$，此时对满足$0\leqslant k\leqslant j$，$0\leqslant l\leqslant j$的$k,l$有$\delta(D_{0,n})=p(y_k,Tx_l)$或者$\delta(D_{0,n})=p(Tx_l,y_k)$. 由(1)、(4)和(5)及条件$(\Phi)$就有

$$\delta(D_{0,n})=p(W(Tx_k,x_k,\beta_k),Tx_l)\leqslant\beta_kp(Tx_k,Tx_l)+(1-\beta_k)p(x_k,Tx_l)\leqslant\beta_k\Phi(\delta(D_{0,n}))+(1-\beta_k)p(x_k,Tx_l)\leqslant\beta_k\delta(D_{0,n})+(1-\beta_k)p(x_k,Tx_l),$$

由此推得$\delta(D_{0,n})=p(x_k,Tx_l)$，由(i)知式(6)成立.

或者有

$$\delta(D_{0,n})=p(Tx_l,W(Tx_k,x_k,\beta_k)),$$

类似可证$\delta(D_{0,n})=p(Tx_l,x_k)$，

由(i)知(6)式仍成立.

(iv) 若$\delta(D_{0,n})=\{p(x_i,x_j):0\leqslant i,j\leqslant n\}$或者$\delta(D_{0,n})=\{p(x_j,x_i):0\leqslant i,j\leqslant n)\}$，此时对满足$0\leqslant k\leqslant l<j$的$k$、$l$，必存在$\delta(D_{0,n})=p(x_k,x_{l+1})>p(x_k,x_l)$，或$\delta(D_{0,n})=p(x_{l+1},x_k)>p(x_l,x_k)$，由(1)和(4)，有

$$\delta(D_{0,n})=p(x_k,x_{l+1})=p(x_k,W(Ty_l,x_l,\alpha_l))\leqslant\alpha_lp(x_k,Ty_l)+(1-\alpha_l)p(x_k,x_l)\leqslant\delta(D_{0,n}),$$

或者

$$\delta(D_{0,n})=p(x_{l+1},x_k)=P(w(Ty_l,x_l,\alpha_i),x_k)\leqslant$$

$$\alpha_l p(Ty_l,x_k)+(1-\alpha_l)p(x_l,x_k)\le\delta(D_{0,n}),$$

由此推得 $\delta(D_{0,n})=p(x_k,Ty_l)$ 或者 $\delta(D_{0,n})=p(Ty_l,x_k)$,由(ii)知式(6)成立.

(v) 若 $\delta(D_{0,n})=\{p(y_i,x_j):0\le i,j\le n\}$ 或者 $\delta(D_{0,n})=\{p(x_j,y_i):0\le i,j\le n\}$. 此时必存在满足 $0\le k,l\le n$ 的 k,l,使得 $\delta(D_{0,n})=p(y_k,x_l)$ 或 $\delta(D_{0,n})=p(x_l,y_k)$,由(1)和(4)有

$$\delta(D_{0,n})=p(W(Tx_k,x_k,\beta_k),x_l)\le$$
$$\beta_k p(Tx_k,x_l)+(1-\beta_k)p(x_k,x_l)\le\delta(D_{0,n}),$$

或者有

$$\delta(D_{0,n})=p(x_l,W(Tx_k,x_k,\beta_k))\le$$
$$\beta_k p(x_l,Tx_k)+(1-\beta_k)p(x_l,x_k)\le\delta(D_{0,n}),$$

由此推得 $\delta(D_{0,n})=p(Tx_k,x_l)$,或 $\delta(D_{0,n})=p(x_l,Tx_k)$,或 $\delta(D_{0,n})=p(x_k,x_l)$,或者 $\delta(D_{0,n})=p(x_l,x_k)$,由(i)、(iv)知(6)仍成立.

(vi) 若 $\delta(D_{0,n})=\{p(y_i,y_j):0\le i,j\le n\}$ 或 $\delta(D_{0,n})=\{p(y_j,y_i):0\le i,j\le n\}$ 存在 $k,l\in N,0\le k\le l<j$,使得 $\delta(D_{0,n})=p(y_k,y_{l+1})>p(y_k,y_l)$ 或 $\delta(D_{0,n})=p(y_{l+1},y_k)>p(y_l,y_k)$. 于是有

$$\delta(D_{0,n})=p(y_k,W(Tx_l,x_l,\beta_l))\le$$
$$\beta_l p(y_k,Tx_l)+(1-\beta_l)p(y_k,x_l),$$

或者有

$$\delta(D_{0,n})=p(W(Tx_l,x_l,\beta_l),y_k)\le$$
$$\beta_l p(Tx_l,y_k)+(1-\beta_l)p(x_l,y_k),$$

由此推得 $\delta(D_{0,n})=p(y_k,x_l)$,或 $\delta(D_{0,n})=p(x_l,y_k)$,或 $\delta(D_{0,n})=p(y_k,Tx_l)$,或者 $\delta(D_{0,n})=p(Tx_l,y_k)$. 由(iii)、(iv)知(6)成立.

(vii) 若 $\delta(D_{0,n})=\{p(y_i,Ty_j):0\le i,j\le n\}$ 或 $\delta(D_{0,n})=\{p(Ty_j,y_i):0\le i,j\le n)\}$,此时对满足 $0\le k<j,0\le l\le j$ 的 k、l,有 $\delta(D_{0,n})=p(y_k,Ty_l)$ 或 $\delta(D_{0,n})=p(Ty_l,y_k)$,由(1)、(4)、(5)和条件($\Phi$),有

$$\delta(D_{0,n})=p(W(Tx_k,x_k,\beta_k),Ty_l)\le$$
$$\beta_k p(Tx_k,Ty_l)+(1-\beta_k)p(x_k,Ty_l)\le$$
$$\beta_k\Phi(\delta(D_{0,n}))+(1-\beta_k)p(x_k,Ty_l)\le$$
$$\beta_k\delta(D_{0,n})+(1-\beta_k)p(Ty_l,x_k),$$

此情形或者不可能,或者 $\beta_k=0$,推得 $\delta(D_{0,n})=p(x_k,Ty_l)$,由(ii)知(6)成立.

或者有

$$\delta(D_{0,n})=p(Ty_l,W(Tx_k,x_k,\beta_k))\le$$
$$\beta_k p(Ty_l,Tx_k)+(1-\beta_k)p(Ty_l,x_k)\le$$
$$\beta_k\Phi(\delta(D_{0,n}))+(1-\beta_k)p(Ty_l,x_k)\le$$
$$\beta_k\delta(D_{0,n})+(1-\beta_k)p(Ty_l,x_k),$$

同样可得 $\delta(D_{0,n})=p(Ty_l,x_k)$,由(ii)知(6)成立.

由(i)——(vii)的讨论知(6)正确.

由(5)、(6)可知,对任何 $n\in N$,有

$$\delta(D_{0,n})\le\max\{p(x_0,Tx_j),p(x_0,Ty_j),p(Tx_j,x_0),p(Ty_j,x_0):0\le j\le n\}.$$

若

$$\max\{p(x_0,Tx_j),p(x_0,Ty_j),p(Tx_j,x_0),p(Ty_j,x_0):0\le j\le n\}=p(x_0,Tx_j),$$

则

$$\delta(D_0,n)\le p(x_0,Tx_0)+p(Tx_0,Tx_j)\le p(x_0,Tx_0)+\Phi(\delta(D_0,n))\le(1-\Phi)^{-1}(p(x_0,Tx_0)).$$

若

$$\max\{p(x_0,Tx_j),p(x_0,Ty_j),p(Tx_j,x_0),p(Ty_j,x_0):0\le j\le n\}=p(x_0,Ty_j),$$

则

$$\delta(D_0,n)\le p(x_0,Ty_0)+p(Ty_0,Ty_j)\le p(x_0,Ty_0)+\Phi(\delta(D_0,n))\le(1-\Phi)^{-1}(p(x_0,Tx_0)).$$

若

$$\max\{p(x_0,Tx_j),p(x_0,Ty_j),p(Tx_j,x_0),p(Ty_j,x_0):0\le j\le n\}=p(Tx_j,x_0),$$

则

$$\delta(D_0,n)\le p(Tx_j,Tx_0)+p(Tx_0,x_0)\le\Phi(\delta(D_0,n))+p(Tx_0,x_0)\le(1-\Phi)^{-1}(p(Tx_0,x_0)).$$

若

$$\max\{p(x_0,Tx_j),p(x_0,Ty_j),p(Tx_j,x_0),p(Ty_j,x_0):0\le j\le n\}=p(Ty_j,x_0),$$

则

$$\delta(D_0,n)\le p(Ty_j,Ty_0)+p(Ty_0,x_0)\le\Phi(\delta(D_0,n))+p(Ty_0,x_0)\le(1-\Phi)^{-1}(p(Ty_0,x_0)).$$

从而

$$\delta(D_{0,n})\le(1-\Phi)^{-1}(p(x_0,Tx_0)),$$
$$\text{或 }\delta(D_{0,n})\le(1-\Phi)^{-1}(p(x_0,Ty_0)),$$
$$\text{或 }\delta(D_{0,n})\le(1-\Phi)^{-1}(p(Tx_0,x_0)),$$
$$\text{或 }\delta(D_{0,n})\le(1-\Phi)^{-1}(p(Ty_0,x_0)).\tag{7}$$

无论那种情况均表明序列 $\{\delta(D_{0,n})\}$ 是有界的.

现对任何 $n,m\in N(0<n<m)$,记 $D_{n,m}=\bigcup_{j=n}^{m}(x_j,y_j,Tx_j,Ty_j)$,由(1)、(5)和(6),有

$$\max_{n\le i,j\le m}\{p(Tx_i,Tx_j),p(Tx_j,Tx_i),p(Tx_i,Ty_j),p(Ty_j,Tx_i),p(Ty_i,Ty_j),p(Ty_j,Ty_i)\}\le\Phi(\delta(D_{n,m})).\tag{8}$$

$$\delta(D_{n,m})=\max_{n\le j\le m}\{p(x_n,Tx_j),p(Tx_j,x_n),p(x_n,Ty_j),p(Ty_j,x_n)\}\tag{9}$$

由(1)、(4)、(8)、(9)有

$$\delta(D_{n,m})=\max_{n\le j\le m}\{p(W(Ty_{n-1},x_{n-1},\alpha_{n-1}),Tx_j),p(Tx_j,W(Ty_{n-1},x_{n-1},\alpha_{n-1})),p(W(Ty_{n-1},x_{n-1},\alpha_{n-1}),Ty_j),p(Ty_j,W(Ty_{n-1},x_{n-1},\alpha_{n-1}))\}\le$$
$$\max_{n\le j\le m}\{[\alpha_{n-1}p(Ty_{n-1},Tx_j)+(1-\alpha_{n-1})p(x_{n-1},Tx_j)],[\alpha_{n-1}p(Tx_j,Ty_{n-1})+(1-\alpha_{n-1}p(Tx_j,x_{n-1})],[\alpha_{n-1}p(Ty_{n-1},Ty_j)+(1-\alpha_{n-1})p(x_{n-1},Ty_j)]\},[\alpha_{n-1}p(Ty_j,Ty_{n-1})+(1-\alpha_{n-1})p(Ty_j,x_{n-1})]\}\le$$
$$\alpha_{n-1}\Phi(\delta(D_{n-1,m}))+(1-\alpha_{n-1})\delta(D_{n-1,m})=(1-\alpha_{n-1}(1-\Phi))(\delta(D_{n-1,m})).$$

由归纳法,并引用(7)可以证明

$$\delta'(D_{n,m})\le\prod_{j=0}^{n-1}(1-\alpha_j(1-\Phi))(\delta(D_{j,m}))\le$$

$$\prod_{j=0}^{n-1}(1-\alpha_j(1-\Phi))(\delta(D_{0,m}))\leqslant\prod_{j=0}^{n-1}(1-\alpha_j(1-\Phi))(t_0),$$

其中 $t_0=(1-\Phi)^{-1}(p(x_0,Tx_0))$ 或 $t_0=(1-\Phi)^{-1}(p(Tx_0,x_0))$ 或 $t_0=(1-\Phi)^{-1}(p(x_0,Ty_0))$ 或 $t_0=(1-\Phi)^{-1}(p(Ty_0,x_0))$.

因函数 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足条件(Φ),故对任一 $t>0$,$\Phi(t)<t$,即 $(1-\Phi)(t)>0$,$\forall t>0$,又因 $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j=\infty$,故有 $\prod_{j=1}^{\infty}(1-\alpha_j(1-\Phi))(t_0)=0$. 于是有

$$\lim_{n,m\to\infty}\delta(D_{n,m})=0.$$

上式表明 $\{x_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 列,又 E 是完备的,就有 $x_n\to z\in E$. 并且 $\lim_{n\to\infty}p(x_n,Tx_n)=0$ 和 $\lim_{n\to\infty}p(Tx_n,x_n)=0$. 现证 $Tx_n\to z(n\to\infty)$. 事实上,若 $\lim_{n\to\infty}p(x_n,Tx_n)=0$,因 p 是 E 上的 W-距离,由 W-距离的定义,存在 $\delta>0$ 和 $[0,\infty)$ 中收敛于 0 的序列 $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,对 $n_0\in N$,当 $n\geqslant n_0$ 时,使得 $\alpha_n\leqslant\delta$ 和 $\beta_n\leqslant\delta$,则当 $n\geqslant n_0$ 时,$p(x_n,Tx_n)\leqslant\alpha_n\leqslant\delta$. $p(x_n,z)\leqslant\beta_n\leqslant\delta$. 因此 $p(Tx_n,z)\leqslant\varepsilon$. 于是 $Tx_n\to z(n\to\infty)$. 同理可证 $\lim_{n\to\infty}p(Tx_n,x_n)=0$,也有 $Tx_n\to z(n\to\infty)$. 于是由(3),有

$$p(Tx_n,Tz)\leqslant\Phi(\max\{p(x_n,z),p(z,x_n),p(x_n,Tx_n),p(Tx_n,x_n),p(z,Tz),p(Tz,z),p(x_n,Tz),p(Tz,x_n),p(z,Tx_n),p(Tx_n,z),p(x_n,x_n),p(z,z)\}).$$

当 $n\to\infty$ 时,上不等式变为

$$p(z,Tz)\leqslant\Phi(\max\{p(z,z),p(z,Tz),p(Tz,z)\})\qquad(*)$$

由文献[12]知 $z=Tz$ 时,$p(z,z)=0$,结合不等式($*$),必有 $z=Tz$ 成立,即 z 为 T 在 E 中的不动点.

现证不动点 z 是惟一的. 若另有 $u=Tu$,则由(3)有

$$p(u,z)=p(Tu,Tz)\leqslant\Phi(\max\{p(u,z),p(z,u)\}),$$

及

$$p(z,u)=p(Tz,Tu)\leqslant\Phi(\max\{p(u,z),p(z,u)\}),$$

于是 $p(u,z)=p(z,u)$,因此 $u=z$,证毕.

定理 2 推广和统一了文献[4-11]的相应结果.

参考文献:

[1] CIRIC L J. A Generalization of Banach's Contraction Principle[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 45(1):267-273.

[2] RHOADES H E. Comments on Two Fixed Point Iteration Methods[J]. J Math Anal Appl, 1976, 56(2):741-750.

[3] NAIMPALLY S A, SINGH K I. Extensions of Some Fixed Point Theorems of Rhoades[J]. J Math Anal Appl, 1983, 96(2):437-446.

[4] LIU QI-HOU. On Naimpally and Singh's open questions[J]. J Math Anal Appl, 1987, 124(1): 157-164.

[5] LIU QI-HOU. A Convergence Theorem of the Seqnence of Ishikawa Iterates for Quasi-contractive Mappings[J]. J Math Anal Appl, 1990, 146(2):301-305.

[6] XU HONG-KUN. A Mote on the Ishikawa Iteration Scheme [J]. J Math Anal Appl, 1992, 167(2):582-587.

[7] DING XIE-PING. Iteration Processes for Nohlinear Mappings in Convex Metric Spaces[J]. J Math Anal Appe, 1988, 132 (1):114-122.

[8] 田有先. 拟压缩映射序列和广义 Ishikawa 迭代[J]. 四川大学学报,1993,30(3): 331-334.

[9] 田有先. 更广义拟压缩的广义 Ishikawa 型迭代[J]. 四川大学学报,2000,37(5): 688-691.

[10] TIAN YOU-XIAN, ZHANG SHI-SHANG. Convergence of Ishikawa Type Iterative Saquence with Errors for Quasi-contractive Mappings in Convex Metric Spaces [J]. J Appl Math Mech, 2002, 9:1 001-1 008.

[11] RHOADES H E. Convergence of an Ishikawa Type Iteration Scheme for a Generalized Contraction[J]. J Math Anal Appl, 1994, 185(2): 350-355.

[12] KADA O, SUZUKI T, TAKAHASHI W. Nonconvex Minimization Theorems and Fixed Point Theorems in Complete Metric Spaces[J]. Math Japonica, 1996,44: 381-391.

On the Iteration of Fixed Points for Generalized Quasi-contractive Mapping in p-convex Metric Spaces

TIAN You-xian, XIE Sheng-shi

(Institute of Computer Science & Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: The purpose of this paper is to define an Ishikawa iterative scheme for generalized quasi-contractive mappings in p-convex metric spaces and to prove that this iterative scheme converges to the unique fixed point of generalized quasi-contractive mappings in p-convex metric space. The results presented in the paper generalize and unify the corresponding results in given by Liu Qin-hou, Xu Hong-kun, Ding Xie-ping, H. E. Rhoades, et al.

Key words: p-convex metric space; quasi-contractive mappings; Ishikawa iterative scheme; fixed point

(编辑 张小强)