文章编号:1000 - 582X(2005)08 - 0083 - 06

介子圈图传播子重整化有限量的有效计算法(II)*

张忠灿[1],王春明[1],方祯云[1],张 宇[1],曾代敏[1],罗 光[1,2]

(1. 重庆大学 数理学院,重庆 400030;2. 重庆师范大学 物信学院,重庆 400047)

摘 要:采用"复变函数积分法",对中性介子与核子(反核子)相互作用的 Lorentz 不变耦合模型中的"介子单圈传播子与链图传播子",在动量重整化方案中的"有限量"——由"大动量积分极限法"所计算导出的"一重积分",作了严格解析计算,获得了这种"传播子"重整化"有限量"的最终严格解析计算结果. 同时,还对这种微小的"辐射修正"作了具体数值计算处理和相关讨论.

关键词:介子单圈传播子;介子链图传播子;动量重整化;复变函数积分法;辐射修正

中图分类号:O413;O572　　　**文献标识码**:A

采用量子场论微扰理论计算单粒子衰变,两粒子散射,多粒子碰撞等诸多物理过程及其相关物理结果、效应时,低阶计算由于仅涉及"树图"计算,因而,通常计算难度不大,比较容易获得相关计算结果. 然而一旦作高阶计算时,由于涉及到"圈图"计算将伴之而产生各种各样的"无穷发散"问题. 采用"重整化"方案虽可从"发散量"中分离出与物理相关的"有限量",但要获得这些"有限量"通常是非常困难的——惯用的计算方法为 Feynman 收敛积分计算方法[1]. 为了获得"重整化有限量",在计算中一般作相关的一些物理近似处理[2-6].

由于"重整化有限量"的贡献(辐射修正)通常都十分微小,并且涉及的计算又非常复杂、困难,而这种"微小修正量"对物理问题的深入研究却十分重要[7-12];因而能够严格计算出这种微小修正量比之作近似计算处理无疑将会更加精细地反映出"辐射修正",进而也会更加有利于对物理问题的深入研究、探讨. 笔者曾对这一问题作了深入探讨与研究,并采用中性介子 π^0 与核子(反核子)相互作用的 Lorentz 不变耦合模型[13],应用"大动量积分极限法"作相关计算后,获得了"介子单圈图传播子与链图传播子"重整化有限量的"一重积分"计算表达式[14]. 对于这个"计算表达式",若采用通常实变函数积分法,则在具体计算上仍非常繁杂、困难. 笔者采用"复变函数积分法",对"这个计算表达式"作了十分有效的严格解析计算,获得了这种"传播子"的最终严格解析计算结果;并还对此作了具体数值计算处理和相关讨论.

1 关于$\sum_c(k^2)$(一维积分)的"实变函数积分法"讨论

在中性介子 π^0 与核子(反核子)相互作用的 Lorenz 不变耦合模型中,利用"大动量积分极限法",可计算出费米子单圈图重整化有限量的一重积分表达式[14]:

$$\sum{}_c(k^2) = \mathrm{i}G^2\Pi_c(k^2);\ \Pi_c(k^2) = \frac{-4\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}xF(x,k,\varepsilon), \tag{1a}$$

其中,可表被积函数 $F(x,k,\varepsilon) = \mathrm{i}\pi^2 f(x,k,\varepsilon)$, $f(x,k,\varepsilon) = f_1(x,k) + \sum_{l=2}^{4} f_l(x,k,\varepsilon)$. (1b)

* 收稿日期:2005 - 04 - 10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10175096);国家重点基础研究发展计划资助项目(973 计划,2003CB71630);重庆市自然科学基金重点项目(8562)

作者简介:张忠灿(1946 -),男,重庆人,重庆大学教授,主要从事理论物理研究.

$$\begin{cases} f_1(x,k) = -(k^2+\mu^2)x(1-x), (\text{不含小量}\varepsilon), \\ f_2(x,k,\varepsilon) = 2\mu^2(k^2+\mu^2)\dfrac{x^2(1-x)^2}{\xi(x)-\mathrm{i}\varepsilon}, \\ f_3(x,k,\varepsilon) = \dfrac{1}{2}[\zeta(x)-2\mathrm{i}\varepsilon](\ln\{[\eta(x)]^2+\varepsilon^2\} - \\ \ln\{[\xi(x)]^2+\varepsilon^2\}), \\ f_4(x,k,\varepsilon) = [\zeta(x)-2\mathrm{i}\varepsilon]\mathrm{i}\{\arctan[\dfrac{\eta(x)}{\varepsilon}] - \\ \arctan[\dfrac{\xi(x)}{\varepsilon}]\}, \\ \xi(x) = m^2 - \mu^2 x(1-x), \\ \zeta(x) = m^2 + 3k^2x(1-x), \\ \eta(x) = m^2 + k^2x(1-x). \end{cases} \tag{1c}$$

采用实变函数积分法可以很容易计算出 $f_1(x,k)$ (不含 ε 小量)的积分值:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x f_1(x,k) = -\frac{1}{6}(k^2+\mu^2), \tag{2}$$

然而要计算出 $f_l(x,k,\varepsilon)$(含 ε 小量, $l=2,3,4$)的积分值,则需计算如下诸多实变函数积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x f_l(x,k,\varepsilon) = \int_0^1 \mathrm{d}x f_l^{(R)}(x,k,\varepsilon) + \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}x f_l^{(I)}(x,k,\varepsilon), (l=2,3,4), \tag{3a}$$

$$\begin{cases} f_2^{(R)}(x,k,\varepsilon) = 2\mu^2(k^2+\mu^2)\dfrac{x^2(1-x)^2\xi(x)}{\{\xi^2(x)+\varepsilon^2\}^2}, \\ f_2^{(I)}(x,k,\varepsilon) = 2\varepsilon\mu^2(k^2+\mu^2)\dfrac{x^2(1-x)^2}{\{\xi^2(x)+\varepsilon^2\}^2}, \end{cases} \tag{3b}$$

$$\begin{cases} f_3^{(R)}(x,k,\varepsilon) = \dfrac{1}{2}\zeta(x)(\ln\{\eta^2(x)+\varepsilon^2\} - \ln\{\xi^2(x)+\varepsilon^2\}), \\ f_3^{(I)}(x,k,\varepsilon) = -\varepsilon(\ln\{\eta^2(x)+\varepsilon^2\} - \ln\{\xi^2(x)+\varepsilon^2\}), \end{cases} \tag{3c}$$

$$\begin{cases} f_4^{(R)}(x,k,\varepsilon) = 2\varepsilon\{\arctan[\dfrac{\eta(x)}{\varepsilon}] - \arctan[\dfrac{\xi(x)}{\varepsilon}]\}, \\ f_4^{(I)}(x,k,\varepsilon) = \zeta(x)\{\arctan[\dfrac{\eta(x)}{\varepsilon}] - \arctan[\dfrac{\xi(x)}{\varepsilon}]\}, \end{cases} \tag{3d}$$

($f_l^{(R)}(x,k,\varepsilon)$ 和 $f_l^{(I)}(x,k,\varepsilon)$ 分别为 $f_l(x,k,\varepsilon)$ 的实部函数和虚部函数($l=2,3,4$)).

由 m(核子、反核子的质量)约为 0.938 GeV, μ(π^0 介子质量)约为 0.135 GeV,以及

$$\begin{cases} 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}, (0 \leqslant x \leqslant 1), \\ -\infty < k^2 < +\infty, (k\ \text{为介子传播子四维动量(变量)}), \end{cases}$$

可以看出:要对(3a-3d)中的"6 个实变函数积分"作计算及处理(完成积分计算后,取($\varepsilon\to 0$)极限),是相当复杂和困难的. 因而若采用实变函数积分法计算"费米子单圈图"重整化有限量 $\Sigma_c(k^2)=\mathrm{i}G^2\Pi_c(k^2)$ 的一重积分(1a-1c),则在计算方法上不可取.

在下一节里,笔者将采用"复变函数积分法"来计算 $\Sigma_c(k^2)=\mathrm{i}G^2\Pi_c(k^2)$ 的一重积分(1a-1c).

2 关于 $\Sigma_c(k^2)$(一维积分)的"复变函数积分法"的具体计算

在"费米子单圈图"重整化有限量 $\Sigma_c(k^2)=\mathrm{i}G^2\Pi_c(k^2)$ 的一重积分计算表达式(1a-1c)中,不含 ε 小量的被积函数 $f_1(x,k)$ 的积分较为容易——计算结果已由式(2)表出,而含 ε 小量的 3 个被积函数 $f_l(x,k,\varepsilon)$ ($l=2,3,4$)中, $f_3(x,k,\varepsilon)$ 与 $f_4(x,k,\varepsilon)$ 可合并后拓广成一个"(复变)被积函数":

$$\begin{cases} f_3(x,k,\varepsilon)+f_4(x,k,\varepsilon) \Rightarrow g_1(z,k,\varepsilon), \\ z = x+\mathrm{i}y\ \text{是复变数}, \end{cases} \tag{4a}$$

$$g_1(z,k,\varepsilon) = [\zeta(z)-2\mathrm{i}\varepsilon](\ln_{(单)}\{\eta(z)-\mathrm{i}\varepsilon\} - \ln_{(单)}\{\xi(z)-\mathrm{i}\varepsilon\}), \tag{4b}$$

$$\begin{cases} \ln_{(单)}\{\eta(z)-\mathrm{i}\varepsilon\} \\ \ln_{(单)}\{\xi(z)-\mathrm{i}\varepsilon\} \end{cases} \text{由"枝点"为 i}\varepsilon\text{ 的同一个单值(复数)对数函数 }\ln_{(单)}(z'-\mathrm{i}\varepsilon)\text{,所派生出来的两个单值(复数)对数函数.} \tag{4c}$$

而 $f_2(x,k,\varepsilon)$ 则相应的拓广成一个"(复变)被积函数":

$$\begin{cases} f_2(x,k,\varepsilon) \Rightarrow g_1(z,k,\varepsilon), \\ g_2(z,k,\varepsilon) = 2\mu^2(k^2+\mu^2)\dfrac{z^2(1-z)^2}{\xi(z)-\mathrm{i}\varepsilon}, (z = x+\mathrm{i}y). \end{cases} \tag{5}$$

于是,含 ε 小量的 3 个一重积分便转换成 2 个复数线积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \sum_{l=2}^4 f_l(x,k,\varepsilon) = I_1(k,\varepsilon)+I_2(k,\varepsilon), \tag{6a}$$

$$\begin{cases} I_1(k,\varepsilon) = \int_C \mathrm{d}z g_1(z,k,\varepsilon), \\ I_2(k,\varepsilon) = \int_C \mathrm{d}z g_2(z,k,\varepsilon), \\ (C\ \text{为实轴上的}[0,1]\text{线段,正向为实轴方向}). \end{cases} \tag{6b}$$

2.1 计算 $I_1(k,\varepsilon)$

1) 首先作积分变量变换 $z'=z-\dfrac{1}{2}$,然后采用分部积分法作计算后,可将 $I_1(k,\varepsilon)$ 表成:

$$I_1(k,\varepsilon) = 4\mathrm{i}\varepsilon\{\ln_{(单)}[(m^2+\frac{1}{4}k^2)-\mathrm{i}\varepsilon] -$$

$$\ln_{(单)}[(m^2-\frac{1}{4}\mu^2)-\mathrm{i}\varepsilon]\}-$$

$$2\int_{C'}\mathrm{d}z'[(m^2+\frac{3}{4}k^2-2\mathrm{i}\varepsilon)z'^2-k^2z'^3]\cdot$$

$$\{\frac{-2k^2}{[m^2+k^2(\frac{1}{4}-z'^2)]-\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{2\mu^2}{[m^2-\mu^2(\frac{1}{4}-z'^2)]-\mathrm{i}\varepsilon}\}. \tag{7}$$

(C'为实轴上$[0,\frac{1}{2}]$线段，正向为实轴方向).

计算中利用了：i) 作积分变量变换 $z'=z-\frac{1}{2}$后的被积函数为"偶函数"

$$g_1(z,k,\varepsilon)|_{z=z'+\frac{1}{2}}=g'_1(z',k,\varepsilon),$$
$$(g'_1(-z',k,\varepsilon)=g'_1(z',k,\varepsilon)),$$

因而，变换后积分曲线 C'可由实轴上$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$直线段考虑成$[0,\frac{1}{2}]$直线段，作积分后再乘以 2.

ii) $\mathrm{d}z'[m^2+3k^2(\frac{1}{4}-z'^2)-2\mathrm{i}\varepsilon]=\mathrm{d}((m^2+\frac{3}{4}k^2-2\mathrm{i}\varepsilon)z'-k^2z'^3)$.

iii) 2 个单值(复数)对数函数(4c)，由"枝点"$\mathrm{i}\varepsilon$所引出的(确定单值分枝函数的)"割线"L只须不穿过 C'即可——以确保 2 个单值(复数)对数函数(4c)均在包围 C'的"单连通区域(邻域)"G 内解析.

2) 因 $I_1(k,\varepsilon)$(式(7))中的第 1 项已不再作积分，故可对其求极限($\varepsilon\to0$)，且不难求出：

$$\lim_{\varepsilon\to0}4\mathrm{i}\varepsilon\{\ln_{(单)}[(m^2+\frac{1}{4}k^2)-\mathrm{i}\varepsilon]-\ln_{(单)}[(m^2-\frac{1}{4}\mu^2)-\mathrm{i}\varepsilon]\}=0, \tag{8}$$

因而，在式(7)中可提前将第 1 项去掉(在以下计算中，将 z',C'改写成 z,C).

3) 分析 $I_1(k,\varepsilon)$(式(7)中的复变函数积分)，即可看出：$I_1(k,\varepsilon)$实为涉及如下"两种类型"($j=1,2$)的积分

$$K_{1,j}=\int_C\mathrm{d}z\frac{z^2}{A_jz^2+B_j-4\mathrm{i}\varepsilon},\ K_{2,j}=\int_C\mathrm{d}z\frac{z^4}{A_jz^2+B_j-4\mathrm{i}\varepsilon}, \tag{9a}$$

$$其中,j=1,2\Rightarrow\begin{cases}A_1=-4k^2,\\A_2=4\mu^2,\end{cases}\begin{cases}B_1=4m^2+k^2,\\B_2=4m^2-\mu^2,\end{cases} \tag{9b}$$

因而，$I_1(k,\varepsilon)$可表成

$$I_1(k,\varepsilon)=16\{(m^2+\frac{3}{4}k^2-2\mathrm{i}\varepsilon)[k^2K_{1,1}+\mu^2K_{1,2}]-k^2(k^2K_{2,1}+\mu^2K_{2,2})\}. \tag{10}$$

4) 计算"两类(复变函数)积分"(9a, 9b)

i) 计算 $K_{1,j}$和 $K_{2,j}(j=1,2)$时，容易将其表成：

$$\begin{cases}K_{1,j}=\frac{1}{A_j}(\int_C\mathrm{d}z+(-B_j+4\mathrm{i}\varepsilon)J_j), & (11a)\\ K_{2,j}=\frac{1}{A_j^2}((-B_j+4\mathrm{i}\varepsilon)\int_C\mathrm{d}z+\int_C\mathrm{d}z(A_jz^2+B_j-4\mathrm{i}\varepsilon)+(-B_j+4\mathrm{i}\varepsilon)^2J_j), & (11b)\\ 其中,J_j=\int_C\mathrm{d}z\frac{1}{A_jz^2+B_j-4\mathrm{i}\varepsilon},\ (j=1,2). & (11c)\end{cases}$$

注意到(11a、11b)中除积分 J_j 外的其余 2 个积分极易计算出，因而实际上主要涉及的积分计算为 J_j.

ii) 计算 J_j 时，注意到其被积函数可折成 2 个"分式函数"：

$$\frac{1}{A_jz^2+B_j-4\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{2A_j\lambda_j}(\frac{1}{z-\lambda_j}-\frac{1}{z+\lambda_j}), \tag{12a}$$

其中，$\pm\lambda_j$ 为二次复变函数方程 $A_jz^2+B_j-4\mathrm{i}\varepsilon=0$ 的 2 个复根：

$$\begin{cases}\pm\lambda_j=\mp\frac{D_j}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{C_j+\sqrt{C_j^2+D_j^2}}}\pm\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{C_j+\sqrt{C_j^2+D_j^2}},\\ 其中,C_j=\frac{B_j}{A_j},\ D_j=\frac{-4\varepsilon}{A_j},\ (j=1,2).\end{cases} \tag{12b}$$

利用(12a、12b)，已不难计算出 $J_j,(j=1,2)$：

$$J_j=\frac{1}{2A_j\lambda_j}(\{\frac{1}{2}\ln\frac{(\frac{1}{2}-\lambda_j^{(R)})^2+(\lambda_j^{(I)})^2}{(\frac{1}{2}+\lambda_j^{(R)})^2+(\lambda_j^{(I)})^2}\}+\mathrm{i}\{\arctan(\frac{\frac{1}{2}-\lambda_j^{(R)}}{\lambda_j^{(I)}})+\arctan(\frac{\frac{1}{2}+\lambda_j^{(R)}}{\lambda_j^{(I)}})\}),(j=1,2), \tag{13}$$

其中，$\lambda_j^{(R)}=\mathrm{Re}(\lambda_j)$即 λ_j 的实部，$\lambda_j^{(I)}=\mathrm{Im}(\lambda_j)$即 λ_j 的虚部.

计算中，利用了：

$$\ln_{(单)}\{z\pm(\lambda_j^{(R)}+\mathrm{i}\lambda_j^{(I)})\}\Big|_{z=0}^{z=\frac{1}{2}}=(\ln|z\pm(\lambda_j^{(R)}+\mathrm{i}\lambda_j^{(I)})|+\mathrm{i}\arg_{(单)}\{z\pm(\lambda_j^{(R)}+\mathrm{i}\lambda_j^{(I)})\})\Big|_{z=0}^{z=\frac{1}{2}},$$

其中，$\arg_{(单)}\{z\pm(\lambda_j^{(R)}+\mathrm{i}\lambda_j^{(I)})\}\Big|_{z=0}^{z=\frac{1}{2}}=\arctan(\frac{z\pm\lambda_j^{(R)}}{\mp\lambda_j^{(I)}})\Big|_{z=0}^{z=\frac{1}{2}}$.

iii) 利用 i)、ii) 可计算出(9a, 9b)中的两类复变函数积分：

$$K_{1,1}=\frac{1}{2A_1}-\frac{B_1-4\mathrm{i}\varepsilon}{A_1}J_1,\ K_{1,2}=\frac{1}{2A_2}-\frac{B_2-4\mathrm{i}\varepsilon}{A_2}J_2, \tag{14a}$$

$$K_{2,1} = \frac{1}{24A_1} - \frac{B_1 - 4i\varepsilon}{2A_1^2} + \frac{(B_1 - 4i\varepsilon)^2}{A_1^2}J_1,$$

$$K_{2,2} = \frac{1}{24A_2} - \frac{B_2 - 4i\varepsilon}{2A_2^2} + \frac{(B_2 - 4i\varepsilon)^2}{A_2^2}J_2, \quad (14b)$$

其中,J_1,J_2 由式(13)给出.

4) 至此(利用式(14a, 14b))可获得积分 $I_1(k,\varepsilon)$(式(10))的计算值——经整理后可表成:

$$I_1(k,\varepsilon) = G_0 + G_1J_1 + G_2J_2, \quad (15a)$$

其中,J_1,J_2 由式(13)和式(12b)给出,而 G_0,G_1,G_2 分别是:

$$\begin{cases} G_0 = 16\{k^2\frac{3m^2+2k^2-6i\varepsilon}{6A_1} + \mu^2\frac{3m^2+2k^2-6i\varepsilon}{6A_2} + \\ k^2(k^2\frac{B_1-4i\varepsilon}{2A_1^2} + \mu^2\frac{B_2-4i\varepsilon}{2A_2^2})\}, \\ G_1 = -16[(m^2+\frac{3k^2}{4}-2i\varepsilon) + k^2\frac{B_1-4i\varepsilon}{A_1}]k^2\frac{B_1-4i\varepsilon}{A_1}, \\ G_2 = -16[(m^2+\frac{3k^2}{4}-2i\varepsilon) + k^2\frac{B_2-4i\varepsilon}{A_2}]\mu^2\frac{B_2-4i\varepsilon}{A_2}, \end{cases} \quad (15b)$$

$(A_1 = -4k^2, A_2 = 4\mu^2; B_1 = 4m^2 + k^2, B_2 = 4m^2 - \mu^2.)$

2.2 计算 $I_2(k,\varepsilon)$

1) 仍先作积分变量变换 $z' = z - \frac{1}{2}$,并注意到变换后的被积函数为"偶函数";因而,变换后积分曲线 C' 可由实轴上 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 直线段考虑成 $[0,\frac{1}{2}]$ 直线段,作积分后再乘以 2——[类同于(2.1 的 1)]. 于是可表示成:

$$I_2(k,\varepsilon) = 4\mu^2(k^2+\mu^2)\int_{C'}dz'\frac{\frac{1}{4} - 2z'^2 + 4z'^4}{A_2z'^2 + B_2 - 4i\varepsilon}. \quad (16)$$

2)(在以下计算中,将 z',C' 改写成 z,C)式(16)可进一步表示成:

$$I_2(k,\varepsilon) = 4\mu^2(k^2+\mu^2)(\frac{1}{4}J_2 - 2K_{1,2} + 4K_{2,2}), \quad (17)$$

其中 J_2,$K_{1,2}$,$K_{2,2}$ 为 3 个积分,分别由式(11c)、(9a, 9b)给出. 再利用式(14b),可将式(17)表示成(即计算出 $I_2(k,\varepsilon)$):

$$I_2(k,\varepsilon) = G'_0 + G'_2J_2, \quad (18a)$$

其中,积分值 J_2 由式(13)和式(12b)给出,而 G'_0,G'_2 分别是

$$G'_0 = 4\mu^2(k^2+\mu^2)(-\frac{5}{6A_2} - 4\frac{B_2-4i\varepsilon}{A_2^2}),$$

$$G'_2 = 4\mu^2(k^2+\mu^2)(\frac{1}{4} + 2\frac{B_2-4i\varepsilon}{A_2} + 4\frac{(B_2-4i\varepsilon)^2}{A_2^2}). \quad (18b)$$

2.3 $\Sigma_c(k^2)$ 的计算结果

利用 $I_1(k,\varepsilon)$ 的计算结果式(15a, 15b),$I_2(k,\varepsilon)$ 的计算结果式(18a, 18b),以及 $f_1(x,k)$ 的积分值式(2),可获得 $\Pi_C(k^2)$ 的计算结果:

$$\Sigma_C(k^2) = iG^2\Pi_C(k^2), \quad (19a)$$

$$\Pi_C(k^2) = \frac{1}{4\pi^2}\Big[\Big(-\frac{k^2+\mu^2}{6} + G_0 + G'_0\Big) + G_1\cdot J_1 + (G_2+G'_2)\cdot J_2\Big], \quad (19b)$$

其中,G_0,G_1,G_2 由式(15b)给出,G'_0,G'_2 由式(18b)给出;而 J_1,J_2 则由式(13)和式(12b)给出.

3 关于 $\Sigma_c(k^2)$ 的一维积分计算结果的极限 $(\varepsilon\to 0)$ 处理

在式(19a,19b)给出的(一维积分计算)结果里,$\Sigma_c(k^2)$ 或 $\Pi_c(k^2)$ 中均含有小量 $\varepsilon(>0)$. 下面,对此作具体 $(\varepsilon\to 0)$ 极限处理.

1) 在 $\Sigma_c(k^2)$ 或 $\Pi_c(k^2)$ 中,所含 5 个"系数":G_0,G_1,G_2,以及 G'_0,G'_2 的 $(\varepsilon\to 0)$ 的极限容易求出——相当于直接略去其中所含的 $\varepsilon(>0)$ 小量. 作上述处理后,并代入其中所含 A_1,A_2,B_1,B_2 的值(9b),经化简后可最后表示出:

$$\begin{cases} G_0 + G'_0 = -\frac{1}{2}(k^2+\mu^2),\ G_1 = 8m^2k^2 + 2k^4, \\ G_2 + G'_2 = 4m^2\mu^2 - 4m^2k^2 + 2\mu^2k^2. \end{cases} \quad (20)$$

2) 计算 $\Sigma_c(k^2)$ 或 $\Pi_c(k^2)$ 中,所含 2 个积分结果 J_1,J_2 的 $(\varepsilon\to 0)$ 极限值

首先,求出复数根 λ_1 和 λ_2 的 $(\varepsilon\to 0)$ 的极限值:

$$\lambda_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_1^{(R)} + i\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_1^{(I)} = \begin{cases} -C(k^2) + i0^+, & (k^2\geq 0), \\ 0^- + iC(k^2), & (-4m^2\leq k^2\leq 0), \\ C(k^2) + i0^+, & (k^2\leq -4m^2), \end{cases} \quad (21a)$$

其中,$C(k^2) = \sqrt{\left|\frac{4m^2+k^2}{k^2}\right|}$,

$$\lambda_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_2^{(R)} + i\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_2^{(I)} = 0^+ + i\sqrt{\frac{4m^2-\mu^2}{\mu^2}},\ (-\infty < k^2 < +\infty). \quad (21b)$$

然后,利用式(21a,21b)不难分别求出 J_1 和 J_2 的 $(\varepsilon\to 0)$ 的极限值:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_1 = \frac{1}{4k^2C(k^2)}\cdot$$

$$\begin{cases}\ln\{(C(k^2)+1)/(C(k^2)-1)\}, & (k^2>0),\\ -2\arctan(1/C(k^2)), & (-4m^2<k^2<0),\\ \ln\{(1+C(k^2))/(1-C(k^2))\}-i\pi, & (k^2<-4m^2),\end{cases} \tag{22a}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_2=\frac{1}{2\mu\sqrt{4m^2-\mu^2}}\arctan\frac{\mu^2}{\sqrt{4m^2-\mu^2}}. \tag{22b}$$

3) 利用式(19a,19b)、(20)和(22a,22b),可最后表出一维积分计算结果式(19)的极限($\varepsilon\to 0$)处理结果——即为重整化有限量$\Sigma_c(k^2)(-\infty<k^2<+\infty)$的最终计算结果:

$$\Sigma_c(k^2)=\frac{iG^2}{4\pi^2}\Big(-\frac{2}{3}(k^2+\mu^2)+\frac{2m^2\mu^2-2m^2k^2+\mu^2k^2}{\mu\sqrt{4m^2-\mu^2}}\arctan\frac{\mu}{\sqrt{4m^2-\mu^2}}\Big)+\frac{1}{2}\frac{(4m^2+k^2)}{\sqrt{|1+4m^2/k^2|}}\cdot$$

$$\begin{cases}\ln((\sqrt{|1+4m^2/k^2|}+1)/(\sqrt{|1+4m^2/k^2|}-1)), & (k^2\geqslant 0),\\ (-2)\arctan\dfrac{1}{\sqrt{|1+4m^2/k^2|}}, & (-4m^2\leqslant k^2\leqslant 0),\\ \{\ln((1+\sqrt{|1+4m^2/k^2|})/(1-\sqrt{|1+4m^2/k^2|}))-i\pi\}, & (k^2\leqslant -4m^2).\end{cases} \tag{23}$$

可见,在$(-\infty<k^2<+\infty)$内,$\Sigma_c(k^2)$为连续函数.

4　关于"介子链图传播子"辐射修正的讨论

由核子(反核子)质量 $m\sim 0.938$ GeV,中性介子的质量 $\mu\sim 0.135$ GeV,可取质量平方比 $m^2/\mu^2=49$. 据此,可将介子传播子四维动量作如下"选点"取值: $k^2=xm^2$(x 为"选点"整数值),表 1 则给出了"介子链图传播子"(由计算机"选点"做"数值计算"后所给出的)辐射修正项的模 $f(k^2)=|\Sigma_C(k^2)\cdot\Delta_F(k^2)|(k^2=xm^2,(|x|\leqslant 2\,000))$的贡献值. .

表 1　介子传播子的修正项的模的贡献值

x	-2 000	-1 000	-800	-500	-200	-100
$f(k^2)$	0.996 2	0.982 0	0.949 0	0.880 9	0.755 1	0.667 4
x	-90	-80	-70	-60	-50	-40
$f(k^2)$	0.654 8	0.640 9	0.625 5	0.608 2	0.588 3	0.565 0
x	-30	-20	-10	-9	-8	-7
$f(k^2)$	0.536 8	0.500 8	0.451 2	0.445 2	0.439 0	0.432 6
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f(k^2)$	0.426 2	0.419 9	0.414 3	0.199 0	0.1348	0.091 6

续表 1

x	1	2	3	4	5	6
$f(k^2)$	0.031 4	0.008 5	0.011 3	0.029 0	0.045 0	0.059 4
x	7	8	9	10	20	30
$f(k^2)$	0.072 7	0.084 9	0.096 3	0.107 0	0.187 2	0.241 3
x	40	50	60	70	80	90
$f(k^2)$	0.282 8	0.315 3	0.343 1	0.367 0	0.388 0	0.406 7
x	100	200	500	800	1 000	2 000
$f(k^2)$	0.423 7	0.538 0	0.694 5	0.776 1	0.815 1	0.936 7

注:中性介子 π^0 与核子(反核子)相互作用属"强相互作用",计算中耦合常数 G^2 取 14.

由表 1 可看出,当介子传播子的四维动量平方 k^2 满足:$-2\,000m^2\leqslant k^2\leqslant 2\,000m^2$($m^2\sim 0.880(\mathrm{GeV})^2$)的这样一个比较大的能量传播范围时,辐射修正项的模小于 1,量子场论微扰论计算仍可行;而当 $-10m^2\leqslant k^2\leqslant 100m^2$ 时,辐射修正项的模小于 0.5,量子场论微扰论计算情形较为理想;而当 $-3m^2\leqslant k^2\leqslant 40m^2$ 时,辐射修正项的模小于 0.3,量子场论微扰论计算情形更为理想. 据此,可以得出这样的结论:采用"Lorentz 不变耦合模型"描述中性介子与核子(反核子)之间的"强相互作用"时,在介子低能传播范围内运用量子场论,微扰论方法仍然十分有效.

5　结　语

采用惯用的"Feynman 收敛积分"计算方法,难于严格解析计算出介子圈图与链图传播子"重整化有限量"——因而只能作近似计算与处理. 但采用"大动量积分极限法"与"复变函数积分法",却可以严格解析计算出这种"传播子"的"重整化有限量"的贡献(较小的辐射修正)——这表明后者应为一种有效计算方法. 能够严格解析计算出这种较小的"辐射修正"(比之作近似计算),将有利于深入研究量子场论"高阶微扰修正";因而,有必要对这种有效计算方法做进一步深入研究与应用.

参考文献:

[1] CLAUDE I, JEAN-BERNARD Z. Quantum Field Theory[M]. New York: McGraw-Hill Inc, 1980. 372-424.

[2] LI C S, YANG J M, ZHU Y L, et al. Yakawa Corrections to Top Pair Production in Photon-Photon Collision[J]. Phys Rev D, 1996,54:4 662-4 676.

[3] MA W G, LI C S, HAN L. Yukawa Corrections to Charged Higgs Pair Production in Photon-Photon Collisions[J]. Phys Rev D, 1996,53:1 304-1 313.

[4] HAN L, HU C G, LI C S, et al. Yakawa Corrections to the Botton Pair Production in Photon-Photon Collision[J]. Phys Rev D, 1996,54:2 363-2 373.

[5] YANG J M, LI C S. Top-Squark Mixing Effects in the Supersymmetric Electroweak Corrections to Top Quark Production at the Fermilar Tevatron[J]. Phys Rev D, 1996,54: 4 380 - 4 384.

[6] ZHOU H Y, LI C S. Supersymmetric QCD Corrections to Top Quark Pair Production at the CERN LHC in Two-Higgs-Doublet Models[J]. Phys Rev D, 1997,55:4 421 - 4 429.

[7] FANG Z Y, CASTRO G, PESTIEAU J, et al. Effective $SU(2)_L \otimes U(1)$ Theory and the Higgs Boson Mass Modern[J]. Physics Letter A, 1997,12(21):1 531 - 1 535.

[8] LI C S, OAKES R J, YANG J M, et al. Supersymmetric QCD Corrections to Single Top Quark Production at the Fermilab Tevatron[J]. Phys Rev D, 1998,57:2 009 - 2 012.

[9] LIU H X, LI C S, XIAO Z J. $O(\alpha_3)$ QCD Corrections to Spin Correlations in $e^+e^- \to t\bar{t}$ Process at the NLC[J]. Phys Lett B, 1999,458:393.

[10] JIN L G, LI C S, OAKES R J, et al. Supersymmetric Electroweak Corrections to Charged Higgs Boson Production in Association with a Top Quark at Hadron Colliders[J]. Phys Rev D, 2000,62:053008.

[11] YANG Y S, LI C S. Electroweak Corrections to the Deacy $H^+ \to W^+$ h in the Minimal Supersymmetric Model[J]. Phys Lett B, 2001,497:101.

[12] JIN L G, LI C S. Supersymmetric Electroweak Corrections to Sbottom Decay into Lighter Stop and Charged Higgs Boson[J]. Phys Rev D, 2002,65:035007.

[13] LURIE D. Particles and Fields, Interscience Publishers[M]. New York: John Wiley&Sons, 1968. 177 - 178.

[14] 张忠灿,罗光,方祯云,等. 介子圈图传播子重整化有限量的有效计算法(I)[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2005, 28(2):119 - 123.

Effective Method Calculating the Renormalized Finite Quantity of the Meson Loop Propagator (II)

ZHANG Zhong-can[1], *WANG Chun-ming*[1], *FANG Zhen-yun*[1], *ZHANG Yu*[1], *ZENG Dai-min*[1], *LUO Guang*[1,2]

(1. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In the Lorentz Invariable Coupling Model of interaction between pion and nucleon (antinucleon), by applying the complex function integral method, the authors have strictly calculated the one-dimensional integral, which is derived from the great momentum integral limit, of the renormalized finite quantity of one-loop propagator and chain propagator in the momentum renormalization scheme and gained the finally strict analysis result. At the last, they have detailed these numerical results of the renormalized finite quantity, and also done the relevant discussion about these minute radiation corrections.

Key words: pion one-loop propagator; pion chain propagator; moment renormalization; complex function integral; radiation correction

(编辑 张 苹)