

文章编号:1000-582X(2006)10-0061-04

# 双渐开线齿轮的模态与振动响应\*

唐勇<sup>1</sup>, 张志强<sup>1</sup>, 唐胜利<sup>2</sup>, 许焰<sup>1</sup>

(1. 长沙大学机电工程系, 湖南长沙 410003; 2. 重庆大学动力工程学院, 重庆 400030)

**摘要:**由任意转角位置的双渐开线齿轮齿面数学模型,在 Pro/E 中建立了高精度的参数化双渐开线齿轮模型. 分析计算了双渐开线齿轮参数对固有频率的影响,对频率响应作了分析. 所得结论反映了齿轮的动力学性能,为双渐开线齿轮设计提供了振动特性数据.

**关键词:**双渐开线齿轮;有限元;固有频率;模态振型;振动响应

**中图分类号:**TP391

**文献标识码:**A

齿轮的固有频率和振型直接影响到齿轮的传动过程、噪声等,工作时为避免共振的发生,应使齿轮工作频率远离固有频率,振动又有利于消除切削加工齿轮时产生的内应力. 张光辉等推出一种集渐开线齿轮和双圆弧齿轮优点的新型齿轮——双渐开线齿轮,它是分阶式双渐开线齿轮的简称<sup>[1]</sup>,樊智敏等通过实验表明与渐开线齿轮相比,双渐开线齿轮有更好的动力学特性<sup>[2]</sup>,精确的模型是对其进行各项分析的基础,李润方等通过实验模态分析以及实测的振动响应与基于精细有限元模型上进行的理论模态分析和动力响应计算结果基本吻合<sup>[3]</sup>. 运用任意转角位置的双渐开线齿轮齿廓参数方程<sup>[4]</sup>在 Pro/E 环境中实现了双渐开线齿轮的参数化精确模型,其齿廓及其脊线均由齿面方程直接获得,所形成的齿面精度高. 其参数化的特点可实现通过修改齿轮参数,简单、快速地完成精确渐开线齿轮库的建立. 利用 Pro/Mechanica 分析了齿轮参数对齿轮固有频率和模态振型的影响,求解了特定齿轮的响应,较好地研究了齿轮的动态特性.

## 1 齿面数学模型

由文献[4]可得双渐开线齿轮的齿面数学模型,因在 ProE 中容易得到圆曲线,故不考虑齿顶、齿根齿廓. 令文献[4]中式(28)~(31)中的、 $zm = 0$ ,整理后得到双渐开线齿面数学模型:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta + \omega_m t) + (r\theta - S)\sin(\theta + \alpha + \omega_m t)\cos\alpha \\ y = \pm r\sin(\theta + \omega_m t)m(r\theta - S)\cos(\theta + \alpha + \omega_m t)/\cos\alpha \\ z = bt \end{cases} \quad (1)$$

齿腰、齿根过渡齿面数学模型为:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta + \omega_m t) + (r\theta - S')\sin(\gamma + \theta + \omega_m t)\cos\gamma \\ y = \pm r\sin(\theta + \omega_m t)m(r\theta - S')\cos(\gamma + \theta + \omega_m t)/\cos\gamma \\ z = bt \end{cases} \quad (2)$$

式中变量的意义、取值范围、下标符号与对应的双渐开线齿轮齿廓参数方程中的相同.

## 2 精确建模

### 2.1 模型的建立

在 Pro/E Wlidge 中,以关系求出式(1)、(2)所需的齿轮或刀具的参数等.

建模过程见文献[5]. 完成轮齿制作后,可根据需要添加零件其它特征. 修改基本参数可以迅速再生成所需的双渐开线齿轮,结果见图 1.

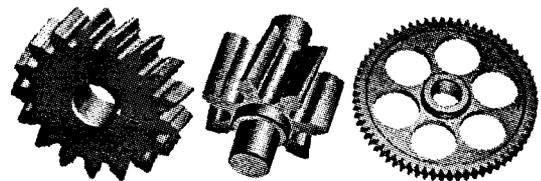


图 1 不同参数的双渐开线圆柱齿轮

\* 收稿日期:2006-05-01

基金项目:湖南省教育厅科研资助项目(05C055)

作者简介:唐勇(1964-),男,重庆梁平人,硕士,长沙大学讲师,主要研究方向为 CAD/CAM 和机械仿真.

## 2.2 模型的精度

将上述方法建立的双渐开线齿轮用不同的齿轮参数生成模型,对垂直于齿轮轴线的任意齿廓截面与由式(1)、(2)获得的曲线、刀具范成包络线分别进行比较、测量,其中一个截图见图2.

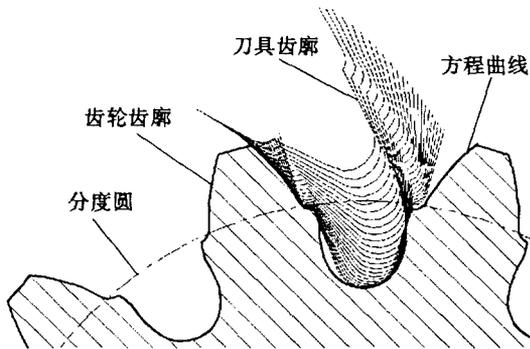


图2 包络线-方程曲线-齿轮齿廓

测量结果,测试组的任意齿廓截面、方程曲线、刀具范成包络线各点间距离为0,误差 $<10^{-6}$  mm (ProE的默认精度).因此,该模型有足够的精度,可以满足工程分析需要.

## 3 模态有限元分析

### 3.1 理论基础

由弹性力学可得多自由度系统在无外力作用,并略去影响不大的阻尼的无阻尼自由振动的运动方程为:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\}$$

式中, $[M]$ 、 $[K]$ 为质量矩阵和刚度矩阵, $\{X\}$ 、 $\{\ddot{X}\}$ 为加速度向量和位移向量.

其对应的特征方程为:

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = \{0\}$$

式中: $\omega$ 为系统的固有频率(特征频率),

$\{X\}$ 为系统特征向量(模态振型).

### 3.2 模态求解与分析

利用 Pro/Mechanica 进行齿轮模型的有限元模态分析,材料属性使用 Pro/E 所提供的 Steel\_mmns,为了能够反映齿轮啮合的实际状态,边界条件设为齿轮内表面约束  $x$ 、 $y$ 、 $z$  向移动和绕  $x$ 、 $y$  轴的转动,按缺省方式自动划分有限元网格.因模态是由系统的固有特性决定的,与外载荷无关,不需要设置载荷边界条件.

Pro/Mechanica 是在不改变网格划分的情况下,靠增加单元内的插值多项式的阶数来达到设定的收敛精度(P-Loop PASS - P 循环过程)计算收敛,这里的 P 即 Polynomial (多项式).如果求解结果在使用到 9 阶多项式的情况下仍不收敛,可以自动加密网格,再使用相对

较低阶数的多项式计算.因此,使用 P 方法进行分析,降低了对网格划分质量的要求和限制,系统可自动收敛求解.而采用传统非适应性 H 方法划分网格,单元虽小,但并不能精确地拟合几何模型,其提高计算精度是靠增加单元数目来实现,求解效率低,对分析人员的有限元知识和实际经验要求较高<sup>[4]</sup>.

对模态分析,阶数越是低阶,影响越大,通常计算 5~10 阶固有频率和振型,精度已足够.设双渐开线齿轮基本参数: $m=4$ 、 $z=29$ 、 $\alpha_a=16^\circ$ 、 $\alpha_b=16^\circ$ 、 $\beta=-18$ 、 $h_a^*=1$ 、 $c^*=0.25$ 、 $x=0$ 、 $p_f^*=0.38$ ,齿宽  $b=30$ 、内孔  $\phi=32$ ,由参考文献[5]所提供的方法选参数  $y_a^*=0.125$ 、 $y_b^*=0.075$ 、 $l_a^*=0.08$ .在 Pro/Mechanica 中用 autoGEM 对该齿轮划分网格:总共 36 372 个单元 9 340 个节点,有限元模型如图 3,采用多通道适应(Multi-Pass Adaptive),最高次项为 9,收敛精度设为 8%,对其计算了前 20 阶固有频率和振型,限于篇幅,表 1 仅给出了齿轮前 10 阶固有频率.图 4 仅给出了该齿轮的 1、2、4、5 阶固有振型.

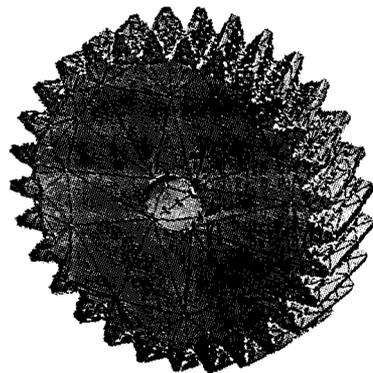


图3 有限元模型

表1 前10阶固有频率和振型

模态	频率/Hz	收敛%	振型
1	4 466.99	3.2	轮齿圆周同向弯曲,圆周振
2	5 851.50	2.4	齿轮端面双向摆动,扭转
3	5 853.96	2.4	齿轮端面双向摆动,扭转
4	7 083.39	1.4	齿轮端面同向弯曲,扭转
5	8 981.47	0.8	齿轮端面鞍形弯曲,扭转
6	8 984.82	0.9	齿轮端面鞍形弯曲,扭转
7	12 170.24	0.6	轮齿圆周异向弯曲,圆周振
8	12 171.82	0.9	轮齿圆周异向弯曲,圆周振
9	16 094.02	0.3	齿轮端面多向扭曲,扭转
10	16 094.85	0.3	齿轮端面多向扭曲,扭转

由表 1 可见,齿轮的固有振型主要是端面上轮齿圆周振动和扭振,图 5 显示了各模态振型不同之处在于轮齿周向振动的方向,频率接近的模态只是振动方向不同.

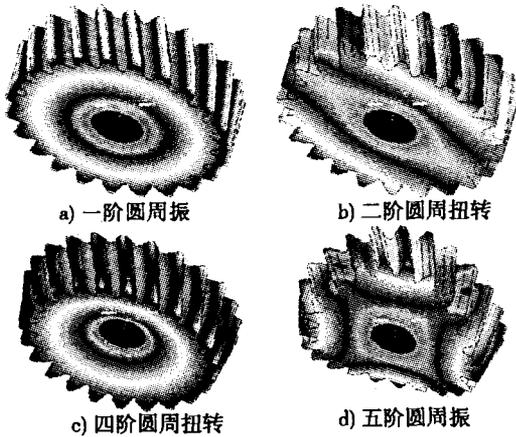


图 4 双渐开线齿全国纪录振形位移变形云图

图 5 显示了在分度圆直径、螺旋角、齿宽相同时,不同模数、齿数的组合对齿轮固有频率的影响,偶数阶用虚线表示(下同)。由图 5,不同组合对低阶(1~6 阶)固有频率影响较小,高阶固有频率则随齿数增大、模数减小,有不同幅度的上升。

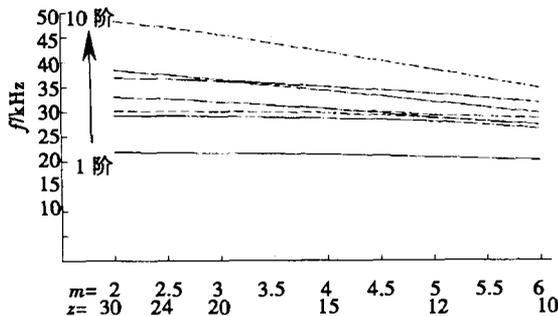


图 5 不同齿数、模数组合的固有频率

图 6 显示了齿数对固有频率的影响,齿轮内孔为  $\phi = 22$ ,其余参数与表 1 齿轮相同,模态中 2 与 3、5 与 6、7 与 8 和 9 与 10 阶间频率相互接近。其中在齿数为 13 齿左右第 9 阶模态从小齿数时与第 8 阶接近变成与第 10 阶接近;齿数较少时固有频率对齿数比较敏感,在齿数增加到一定(如图约 27 齿)值后,齿数对模态频率影响变小。

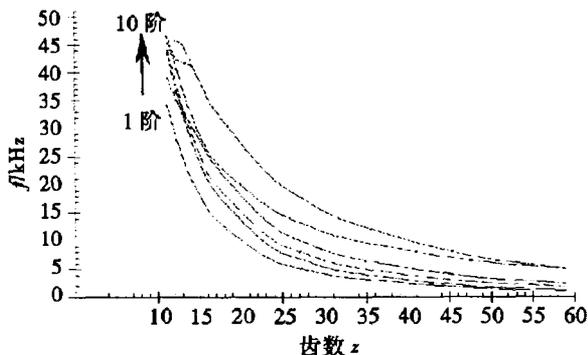


图 6 齿数对固有频率的影响

### 3.3 齿轮结构对模态的影响

将表 1 齿轮在齿数  $z = 23$  时按工程常用方法(这

里采用类似幅板齿轮结构)除去部分材料后进行模态分析,结果见表 2。

表 2 增加工程特征后前 10 阶固有频率变化 Hz

模态	原频率	现频率	模态	原频率	现频率
1	7 243.58	3 461.40	6	13 619.54	4 926.44
2	9 691.76	3 463.70	7	16 393.95	9 992.85
3	9 705.88	4 384.67	8	16 404.15	9 996.43
4	11 114.09	4 775.36	9	22 398.99	10 815.48
5	13 616.80	4 924.71	10	22 408.13	10 831.95

从后处理程序并结合表 1 对比,原一阶频率由 7 243.58 Hz 下降为 3 461.40 Hz,变成第三阶,其余各模态频率有明显的下降。因此通过改变齿轮结构能明显的改变齿轮的模态频率。模态振形见图 7(仅列出 1、3 阶模态)。观察振形,除第一阶和第二、三阶换位外,其余各阶振形与表 1 相同。

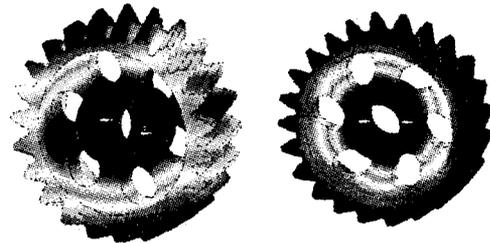


图 7 附加特征后的振形位移云图

### 3.4 频率响应

对表 1 所描述的齿轮只考虑重力,约束边界条件与模态相同,搜索分析此时在动态频率(Dynamic Frequency Analysis)时产生的冯氏应力(von Mises),计算结果见表 3、表 4。

表 3 前 10 阶动态频率分析

序号	频率/Hz	零件因素	参与振动质量比/%
1	4 466.99	-0.02	0.00
2	5 851.50	0.10	0.00
3	5 853.96	-0.78	0.00
4	7 083.39	-0.15	0.00
5	8 981.47	0.09	0.00
6	8 984.82	0.99	0.00
7	12 170.24	-20.13	0.20
8	12 171.82	451.18	81.20
9	16 094.02	-0.01	0.00
10	16 094.85	0.34	0.00

表 4 振动应力最大的前 10 个频率

序号	频率/Hz	振动应力测量值/Pa	序号	频率/Hz	振动应力测量值/Pa
1	12 170.24	9 624.538	6	9 001.44	26.716
2	12 171.82	490.611	7	12 167.16	23.737
3	5 884.00	71.990	8	12 164.69	15.754
4	12 169.62	47.557	9	12 179.76	15.319
5	12 175.92	30.628	10	12 159.12	9.195 0

由表3知,该齿轮有占总质量的81.20%的振动频率为12 171.82 Hz,齿轮在模态的第七阶、第八阶时容易发生频率响应,即此时最容易产生共振。part. Factor(mass participation factor)反映了参与到特定频率的质量,此值的总数应趋于模型的总数。如果选用了足够多的固有频率,那么所有的part factor相加应是100%,根据精度要求,至少应达到质量均方根的50%~90%。因部分频率只引起了模型的高阶振动,这部分固有频率分析在所列10阶之上,故这里有效振动质量为81.2%,精度已满足工程需要。振动的振形为轮齿圆周异向弯曲,因此圆周振是齿轮发生共振可能性最大的振型。

表4显示出测量的最大振动应力的频率在12 170、12 171 Hz左右,即模态的第七阶、第八阶附近,此时振型为轮齿圆周异向弯曲,圆周振,在频率为5 884 Hz,即模态的第二阶、第三阶也有较大振动应力,其应力不同在重力方向不同上。多个齿轮计算表明,最大振动应力主要在模态七阶、八阶时。

由计算结果可知,如果使用12 170 Hz左右的频率对该齿轮在相同约束条件下进行振动处理,则可以通过形成共振来减小齿轮在加工过程中形成的内应力,达到提高齿轮质量的的目的。

#### 4 结论

1)所使用的数学模型能精确描述双渐开线齿轮。

通过Pro/Mechanica的后处理程序直观地显示振型图和动画。分析表明,双渐开线齿轮主要为圆周方向振动。

2)计算了齿轮齿数、内孔直径等齿轮参数对双渐开线齿轮固有频率的影响。分析表明,齿数对各阶频率均有影响,随齿数增加,其影响变小;不同齿数、模数组对低阶固有频率影响较小;改变结构能明显改变模态频率。

3)求解了一个齿轮的频率响应实例,这种方法可为振动去除齿轮内应力便捷的提供理论数据。

#### 参考文献:

- [1] 张光辉,许洪斌,龙慧,等.分阶式双渐开线齿轮[J].机械工程学报,1995,31(6):47-52.
- [2] 樊智敏,张光辉.双渐开线齿轮振动特性的试验研究[J].机械科学与技术,2002,21(5):820-823.
- [3] 李润方,林腾蛟,陶泽光.齿轮箱振动和噪声实验研究[J].机械设计与研究,2003,19(5):63-65.
- [4] 张志强,夏尊凤,唐勇,等.任意转角位置的双渐开线齿轮的齿面数学模型[J].机械工程学报,2006,42(4):38-42.
- [5] 唐勇,张志强,许焰,等.双渐开线齿轮的精确建模与特征参数选择[J].机械传动,2006,30(2):24-27.
- [6] 方建军,刘仕良.机械动态仿真与工程分析-Pro/Engineer Wildfire[J].工程应用,2004,(9)100.

## The Mode and Vibration Response of the Double Involute Gear

TANG Yong, ZHANG Zhi-qiang, TANG Sheng-li, XU Yan

(1. Department of Mechanical and Electrical Engineering Changsha University, Changsha 410003, China;

2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** From the mathematical model of the double involute gear teeth surface at any corner position, we establish the model of the double involute gear with high precision and parameter in Pro/E, analyze and calculate the influence of natural frequency by the parameter of the double involute gear, analyze the frequency respond elementary. The conclusions reflect the gear's performance of dynamics, and provide the librate characteristic data for the design of double involute gear.

**Key words:** double involute gear; finite element; natural frequency; modal shape; vibration response

(编辑 陈移峰)