文章编号:1000 - 582X(2006)10 - 0131 - 04

时滞反应扩散方程周期解的存在稳定性*

王长有[1], 李树勇[2]

(1. 重庆邮电大学 应用数学研究所, 重庆 400065;
2. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 四川 成都 610066)

摘 要:利用上、下解方法及不动点理论研究了一类反应项非单调的时滞反应扩散方程,构造了非单调反应项的上、下控制函数,并证明了所构造的函数满足 Lipschitz 条件及单调性,克服了反应项非单调无法利用单调迭代方法的局限性,为讨论反应项非单调的微分方程提供了一种有效方法,并获得了此系统边值问题周期解存在性的充分条件;另外,还给出了证明其周期解稳定的方法,推广了已有的一些成果。

关键词:时滞;周期解;上、下解;时滞反应扩散方程;不动点理论;存在稳定性

中图分类号:O175.26 **文献标识码**:A

1 引言及预备

考虑下述时滞反应扩散方程的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Lu=f(x,t,u,u_t) & (x,t)\in\Omega\times R,\\ Bu(x,t)=g(x,t) & (x,t)\in\partial\Omega\times R,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\Omega\in R^N$ 是一个有界开区域,且有光滑边界 $\partial\Omega$,L 是一个二阶微分算子,定义为

$$Lu=-\sum_{j,k=1}^{N}a_{j,k}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{N}b_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

B 是一个边界算子,$Bu=u$ 或者 $Bu=\partial u/\partial v+\beta(x,t)u$,这里 $\partial u/\partial v$ 表示 u 在 $\partial\Omega$ 的外法向导数,$u_t=u(x,t+s),s\in(-r,0)$.

在文献[1]中,何猛省先生讨论了系统(1)的特殊情形

$$\begin{cases}L_0[u]=(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2})u=f(u,u_t),t\in R,x\in[0,l],\\ u\Big|_{x=0}=g(x),u\Big|_{x=l}=h(t),t\in R.\end{cases}\tag{2}$$

这里 u,f,g,h 是数值或向量函数,$u=u(t,x)$,$u_t=u(t-s,x)$,时滞 $s>0$. 利用单调方法获得了方程(2)在反应项 $f(u,u_t)$ 对 u_t 单调时,存在唯一周期解的充分条件. 刘迎东在文献[2]中将问题(1)推广到了方程组情形,建立了非自治时滞反应扩散方程组的边值问题(1)在反应项 $f(x,t,u,u_t)$ 对 u_t 单调时周期解的存在唯一性. 在文献[3]中,作者推广了文献[1]的结果,笔者通过构造上、下控制函数,利用文献[2]的思想,证明了系统(1)当反应项 $f(x,t,u,u_t)$ 对 u_t 非单调时周期解的存在性,并证明了相应周期时滞模型周期解的稳定性,推广了文献[2]的部分结果.

设函数 $f(x,t,u,\varphi)$ 是 $\bar{\Omega}\times[0,\omega]\times R\times C$ 上的连续函数,其中 $C=:C([-r,0],R)$ 记 $X_\Sigma=\{\varphi:\varphi\in C([-r,0],R),\varphi(\theta)\in\Sigma,\theta\in[-r,o]\}$,其中 $\Sigma=[a,b]$,对 $u:\Omega\times[0,\omega]\to\Sigma,x\in\Omega,t\in[0,\omega],\varphi\in X_\Sigma$,定义 $H(x,t,u,\varphi)=\sup\limits_{a\le\psi\le\varphi}f(x,t,u,\psi)$,$h(x,t,u,\varphi)=\inf\limits_{\varphi\le\psi\le b}f(x,t,u,\psi)$,其中 $\psi(0)=\varphi(0)$,则有 $h(x,t,u,\varphi)\le f(x,t,u,\varphi)\le H(x,t,u,\varphi)$,$x\in\Omega,t\in[0,\omega],u:\Omega\times[0,\omega]\to\Sigma,\varphi\in X_\Sigma$.

假设

1) 对每一个 $K>0$,存在 $M>0$,使得

$|f(x,t,u,\varphi)-f(y,s,v,\psi)|\le M(|x-y|^\alpha+|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|u-v|+\|\varphi-\psi\|)$

其中$(x,t),(y,s)\in\Omega\times[0,\omega]$,$\phi,\psi\in X_\Sigma$,$\|\varphi\|$,

* 收稿日期:2006 - 05 - 16
基金项目:四川省学术与技术带头人培养基金资助项目(1200311);重庆邮电大学青年教师科技基金资助项目(A2005 - 14)
作者简介:王长有(1968 -),男,江西东乡人,重庆邮电大学讲师,硕士,主要从事偏泛函微分方程理论和应用研究.

$\|\psi\| \le K$, $\|\varphi\| = \sup_{-r\le\theta\le 0} |\varphi(\theta)|$, u,v 是从 $\Omega\times[0,\omega]$ 到 $\sum$ 的连续函数.

2) 如果 $\varphi\in C([-r,0],R)$,满足 $\varphi(s)\in\sum$, $-r\le s\le 0$,且 $\varphi(0)=a$(或 $\varphi(0)=b$),那么 $f(x,t,u,\varphi)\ge 0$(或 $f(x,t,u,\varphi)\le 0$,对一切 $u:\Omega\times[0,\omega]\to\sum$ 成立.

利用类似文献[3]中引理 3 的证明方法可得下述引理.

引理 1 如果 f 满足 (F_1),(F_2),那么 H 和 h 也满足 (F_1),(F_2),且对 φ 单调不减.

2 主要结果

2.1 方程情形

定义 1 如果存在一对 ω-周期函数 $\tilde{u},\hat{u}\in C^{2,1}(\bar{\Omega}\times[0,\omega])$ 满足 $\tilde{u}>\hat{u}$,且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+L\tilde{u}\ge H(x,t,\tilde{u},\tilde{u}_t) & (x,t)\in\Omega\times R\\ \dfrac{\partial\hat{u}}{\partial t}+L\hat{u}\ge H(x,t,\hat{u},\hat{u}_t) & (x,t)\in\Omega\times R\\ B\tilde{u}(x,t)\ge g(x,t)\ge B\hat{u}(x,t) & (x,t)\in\partial\Omega\times R,\end{cases}$$

则 $\tilde{u},\hat{u}$ 分别称为(1.1)的周期上、下解.

假设

1) 系数函数 $a_{kj}(x,t)=a_{jk}(x,t)$, $b_j(x,t)\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega])$, $\beta(x,t)\ge 0$ 和 $g(x,t)$ 可被延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega])$ 上的函数,所有函数关于 t 以 ω 为周期。

2) 存在一个正常数 r 使得对任意 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in R^N$, $(x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,\omega]$,有

$$\sum_{j,k=1}^{N}a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k\ge r|\xi|^2.$$

3) $f(x,t,u,u_t)$ 关于 t 以 ω 为周期,存在一个正常数 M 使得对任意 (x,t),$(y,t)\in\bar{\Omega}\times[0,\omega]$, $u,v\in\sum$, $u_t,v_t\in X_{\sum}$,有

$$|f(x,t,u,u_t)-f(y,s,v,v_t)|\le M(|x-y|^{\alpha}+|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|u-v|+\|u_t-v_t\|)。$$

改写式(1)为形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Lu+Mu=f(x,t,u,u_t)+Mu, & (x,t)\in\Omega\times R,\\ Bu(x,t)=g(x,t), & (x,t)\in\partial\Omega\times R.\end{cases}\tag{3}$$

显然,问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+Lw+Mw=0, & (x,t)\in\Omega\times R,\\ Bw(x,t)=g(x,t), & (x,t)\in\partial\Omega\times R,\end{cases}$$

有唯一 ω-周期解 $w(x,t)$.

若令 $v=u-w$,有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+Lv+Mv=f^*(x,t,v,v_t), & (x,t)\in\Omega\times R,\\ Bv(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times R.\end{cases}$$

这里

$$f^*(x,t,v,v_t)=f(x,t,v+w,v_t+w_t)+M(v+w)$$

因此,不失一般性,可设系统(1),(3)中 $g(x,t)=0$.

首先把问题(1)纳入适当的泛函分析框架,令

$$E=\{u(x,t):u\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega]\ \text{且关于}\ t\ \text{以}\ \omega\ \text{周期}\}$$

对任意 $u\in E$,边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+Lv+Mv=u, & (x,t)\in\Omega\times R,\\ Bv(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times R.\end{cases}$$

有唯一 ω-周期解 v,这就定义了一个线性算子 $G:E\to E$ 为 $v=Gu$.

易知,u 是边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Lu=f(x,t,u,u_t) & (x,t)\in\Omega\times R,\\ Bu(x,t)=0 & (x,t)\in\partial\Omega\times R.\end{cases}$$

的一个 ω-周期解等价于 w 是算子方程 $u=Tu$ 在 E 上的一个解,这里

$$Tu=G(f(x,t,u,u_t)+Mu)$$

由假设 1),2) 知:$T:E\to E$ 是一个紧算子.

定理 1 设式(1)有一对 ω-周期上、下解 $\tilde{u}(x,t)$,$\hat{u}(x,t)$ 且 $\tilde{u}(x,t)\ge\hat{u}(x,t)$,$(x,t)\in\Omega\times[0,\omega]$,则式(1)存在一个 ω-周期解 $u(x,t)$ 满足

$$\hat{u}(x,t)\le u(x,t)\le\tilde{u}(x,t),\ (x,t)\in\Omega\times R.$$

证明 对任意 $u\in E$ 满足 $\hat{u}\le u\le\tilde{u}$,考虑 $v=Tu$,由于 $Tu=G(f(x,t,u,u_t)+Mu)$,则有

$$\frac{\partial v}{\partial t}+Lv+Mv=f(x,t,u,u_t)+Mu$$

令 $w=v-\hat{u}$,利用引理 1,则有

$$\frac{\partial w}{\partial t}+Lw+Mw=\left(\frac{\partial v}{\partial t}+Lv+Mv\right)-\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}+L\hat{u}+M\hat{u}\right)\ge f(x,t,u,u_t)+Mu-h(x,t,\hat{u},\hat{u}_t)-M\hat{u}\ge h(x,t,u,\hat{u})-h(x,t,\hat{u},\hat{u}_t)+M(u-\hat{u})\ge 0$$

根据文献[2],于是 $w\ge 0$,即 $v\ge\hat{u}$. 同理可证 $v\le\tilde{u}$,所以 $\hat{u}\le v=Tu\le\tilde{u}$.

由嵌入定理及线性抛物型方程解的 L_p 估计知,存在常数 M_1,使得 $v=Tu\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega])$ 且 $|v|\le M_1$,令 $S=\{u(x,t):u\in E,\hat{u}\le u\le\tilde{u},|u|\le M_1\}$,则 S 是 E 中的闭凸集,且 $T(S)\subset S$,紧算子 T 把 S 映入 S,由 Schouder 不动点定理可知,算子 T 在 S 中有一个不动

点,即式(1)有一个 ω - 周期解 $u(x,t)$ 满足

$$\hat{u}(x,t) \le u(x,t) \le \tilde{u}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times R.$$

2 方程组情形

考虑下述边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + L_1 u = f_1(x,t,u,v_t) & (x,t) \in \Omega \times R, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + L_2 v = f_2(x,t,u_t,v) & (x,t) \in \Omega \times R, \\ B_1 u(x,t) = g_1(x,t) \quad B_2 v(x,t) = g_2(x,t) & (x,t) \in \partial\Omega \times R. \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\Omega \in R^N$ 是一个有界开区域,且有光滑边界 $\partial\Omega$,对每个 $i \in \{1,2\}$,L_i是一个二阶微分算子,定义为

$$L_i u = -\sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k}^{(i)}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_j^{(i)}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

B_i 是一个边界算子 $B_1 u = u, B_2 v = v$ 或者 $B_1 u = \partial u/\partial\gamma + \beta_1(x,t)u, B_2 v = \partial v/\partial\gamma + \beta_2(x,t)v$ 这里$\partial u/\partial\gamma, \partial v/\partial\gamma$ 表示 u,v 在$\partial\Omega$ 的外法向导数,$u_t = u(x,t+s), v_t = v(x,t+s), s \in (-r,0)$.

对 $u,v:\Omega \times [0,\omega] \to \sum, x \in \Omega, t \in [0,\omega], \varphi \in X_{\sum}$,定义 $H_1(x,t,u,\varphi) = \sup\limits_{\alpha \le \psi \le \varphi} f_1(x,t,u,\psi)$,$H_2(x,t,\varphi,v) = \sup\limits_{\alpha \le \psi \le \varphi} f_2(x,t,\psi,v)$,$h_1(x,t,u,\varphi) = \inf\limits_{\varphi \le \psi \le \beta} f_1(x,t,u,\psi)$,$h_2(x,t,\varphi,v) = \inf\limits_{\varphi \le \psi \le \beta} f_2(x,t,\psi,v)$,$\psi(0) = \varphi(0)$,易知 $H_1(x,t,u,\varphi)$,$h_1(x,t,u,\varphi)$对 φ 是单调不减的,且 $h_1(x,t,u,\varphi) \le f_1(x,t,u,\varphi) \le H_1(x,t,u,\varphi)$,$H_2(x,t,\varphi,v)$对 φ 是单调不减的, 且 $h_2(x,t,\varphi,v) \le f_2(x,t,\varphi,v) \le H_2(x,t,\varphi,v)$.

定义 2　如果存在 ω - 周期函数$(\tilde{u},\tilde{v}),(\hat{u},\hat{v}) \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,\omega])$满足下列不等式

$$\tilde{u} > \hat{u},\ \tilde{v} > \tilde{v},\ t \in \overline{\Omega}, x \in [0,\omega],$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + L_1\tilde{u} \ge H_1(x,t,\tilde{u},\tilde{v}_t) & (x,t) \in \Omega \times R, \\ \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + L_2\tilde{v} \ge H_2(x,t,\tilde{u}_t,\tilde{v}) & (x,t) \in \Omega \times R, \\ B_1\tilde{u}(x,t) \ge g_1(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times R, \\ B_2\tilde{v}(x,t) \ge g_2(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times R, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} + L_1\hat{u} \le H_1(x,t,\hat{u},\hat{v}_t) & (x,t) \in \Omega \times R, \\ \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial t} + L_1\hat{v} \le H_2(x,t,\hat{u}_t,\hat{v}) & (x,t) \in \Omega \times R, \\ B_1\tilde{u}(x,t) \le g_1(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times R, \\ B_2\tilde{v}(x,t) \le g_2(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times R, \end{cases}$$

则称$(\tilde{u},\tilde{v}),(\hat{u},\hat{v})$分别为式(4)的一对有序周期上、下解.

又假设

1) 对每一个$(i=1,2)$,系数函数 $a_{j,k}^{(i)}(x,t) = a_{k,j}^{(i)}(x,t), b_j^{(i)}(x,t) \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega} \times [0,\omega])$,$\beta_i(x,t) \ge 0$ 和 $g_i(x,t)$可被延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega} \times [0,\omega])$上的函数,所有函数关于 t 以 ω 为周期.

2) 对每一个 $i(i=1,2)$,存在一个正常数 r 使得对任意

$$\xi = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N) \in R^N,\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,\omega],$$

有

$$\sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k}^{(i)}(x,t)\xi_j\xi_k \ge r|\xi|^2$$

3) $f_1(x,t,u,v_t), f_2(x,t,u_t,v)$关于 t 以 ω 为周期,且满足(F_1).

利用类似定理 1 的证明可得如下结论.

定理 2　如果条件 1) - 3)成立,且边值问题见式(4)存在 ω - 周期上、下解$(\tilde{u},\tilde{v}),(\hat{u},\hat{v})$,那么系统式(4)存在 ω - 周期解(u,v),且满足

$$\hat{v} \le u \le \tilde{u},\ \hat{v} \le v \le \tilde{v},\ (x,t) \in \Omega \times R.$$

3 应用举例

考虑非单调系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - d_1(x,t)\Delta u_1 = f_1(x,t,u_1,u_2), (x,t) \in \Omega \times R, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - d_2(x,t)\Delta u_2 = f_2(x,t,u_1,u_2), (x,t) \in \Omega \times R, \\ B_i u_i = 0 \quad (x,t) \in \partial\Omega \times R. \\ u_i(x,0) = u_{i0}(x), \quad x \in \Omega, \ i = 1,2. \end{cases} \tag{5}$$

对 $i=1,2$, 边界算子 B_i 和函数 d_i, f_i 的光滑性条件同前,且 d_i, f_i, B_i 关于 t 以 ω 为周期,系统(5)相应的周期问题可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - d_1(x,t)\Delta u_1 = f_1(x,t,u_1,u_2), (x,t) \in \Omega \times R, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - d_2(x,t)\Delta u_2 = f_2(x,t,u_1,u_2), (x,t) \in \Omega \times R, \\ B_i u_i = 0 \quad (x,t) \in \partial\Omega \times R. \\ u_i(x,t+\omega) = u_i(x,t), x \in \Omega \times R, \ i = 1,2. \end{cases} \tag{6}$$

设 $\tilde{U}(x,t) = (\tilde{U}_1(x,t), \tilde{U}_2(x,t)) \ge (\hat{U}_1(x,t), \hat{U}_2(x,t)) = \hat{U}(x,t)$是(6)的 ω - 周期上、下解,令 $\tilde{u}_i(x,t)$,$\hat{u}_i(x,t)$分别是 (5) 相应于初值 $u_{i0}(x) = \tilde{U}_i(x,0)$,$u_{i0}(x) = \hat{U}_i(x,0)$的解,且$(\hat{U}_{1\omega}(x,t), \hat{U}_{2\omega}(x,t))$,$(\hat{U}_{1\omega}(x,t), \hat{U}_{2\omega}(x,t))$分别是$(\hat{U}(x,t), \tilde{U}(x,t))$中的最小和最大的周期解,则有如下结论.

定理3 $\hat{u}_i(x,t)$关于变量t一致收敛到$\hat{U}_{i\omega}(x,t)$,且在$\hat{u}_i(x,t+\omega)\geq\hat{u}_i(x,t)$的意义下单调增;$\tilde{u}_i(x,t)$关于变量$t$一致收敛到$\tilde{U}_{i\omega}(x,t)$,且在$\tilde{u}_i(x,t+\omega)\leq\tilde{u}_i(x,t)$的意义下单调减.

证明 由式(5)和式(6)的上、下解定义,可知$(\tilde{U}_1(x,t),\tilde{U}_2(x,t))$ $(\hat{U}_1(x,t),\hat{U}_2(x,t))$是式(5)相应于初值$u_{i0}(x)\in(\hat{U}_i(x,0),\tilde{U}_i(x,0))$ $(i=1,2)$的上、下解,于是由定理2,$\tilde{u}_i(x,t)$,$\hat{u}_i(x,t)$全局存在.

由比较原理,

$$\hat{u}_i(x,t)\leq\tilde{u}_i(x,t),$$
$$\hat{u}_i(x,t+\omega)\geq\hat{U}_i(x,t+\omega)=\hat{U}_i(x,t),$$
$$\tilde{u}_i(x,t+\omega)\leq\tilde{U}_i(x,t+\omega)=\tilde{U}_i(x,t).$$

定义$\hat{u}_{im}(x,t)=\hat{u}_i(x,t+m\omega)$,$\tilde{u}_{im}(x,t)=\tilde{u}_i(x,t+m\omega)$. 由系统的周期性,$\hat{u}_{i1}(x,t)$是式(5)的初值为$u_{i0}(x)=\hat{u}_i(x,\omega)$的解.

因$\hat{u}_i(x,\omega)\geq\hat{U}_i(x,0)$,所以$\hat{u}_{i1}(x,t)\geq\hat{u}_i(x,t)$. 同理,$\tilde{u}_{i1}(x,t)\leq\tilde{u}_i(x,t)$. 由归纳法,有$\hat{u}_{i(m+1)}(x,t)\geq\hat{u}_{im}(x,t)$,$\tilde{u}_{i(m+1)}(x,t)\leq\tilde{u}_{im}(x,t)$和$\hat{u}_{im}(x,t)\leq\tilde{u}_{im}(x,t)$,于是$\lim\limits_{m\to+\infty}\hat{u}_{im}(x,t)$,$\lim\limits_{m\to+\infty}\tilde{u}_{im}(x,t)$存在且关于$t$以$\omega$为周期,类似文献[5]中讨论,它们是式(6)的解. 对式(6)在$(\hat{U}_\omega(x,t),\tilde{U}_\omega(x,t))$中的任意解$U(x,t)$,$U(x,t)$是式(5)的初值为$u_{i0}(x)=U_i(x,0)$的解,由比较原理,$\hat{u}_i(x,t)\leq U_i(x,t)\leq\tilde{u}_i(x,t)$,$(i=1,2)$,于是

$$\lim_{m\to+\infty}\hat{u}_{im}(x,t)=\lim_{m\to+\infty}\hat{u}_i(x,t+m\omega)\leq$$
$$\lim_{m\to+\infty}U_i(x,t+m\omega)=U_i(x,t)$$
$$\lim_{m\to+\infty}U_i(x,t+m\omega)\leq\lim_{m\to+\infty}\tilde{u}_i(x,t+m\omega)$$
$$=\lim_{m\to+\infty}\tilde{u}_{im}(x,t)$$

则$\lim\limits_{m\to+\infty}\hat{u}_{im}(x,t)=\hat{U}_{i\omega}(x,t)$,$\lim\limits_{m\to+\infty}\tilde{u}_{im}(x,t)=\tilde{U}_{i\omega}(x,t)$

推论1 若式(6)在$(\hat{U}(x,t),\tilde{U}(x,t))$中的解唯一,则式(6)的这个解$U(x,t)$关于$u_{i0}(x)\in(\hat{U}(x,0),\tilde{U}(x,0))$,稳定$(i=1,2)$.

参考文献

[1] 何猛省. 一类含时滞的反应扩散方程的周期解和概周期解[J]. 数学学报,1989,32: 91-97.

[2] YING DONG LIU, ZHENG YUAN LI, QI XIAO YE. The existence, Uniqueness and Stability of Positive Periodic Solution for Periodic Reaction-diffusion Systim[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2001,(1): 1-13.

[3] 王长有,李树勇,杨治国. 含时滞的反应扩散方程周期解的存在唯一性[J]. 四川师范大学报(自然科学版),2004,(4): 339-342.

[4] JIAN HONG WU. Theory and applications of partial functional differential equations[A]. Applied Mathematical Sciences[C]. New York: Springer-Verlag,1997.

[5] A HMAD SHAIR, LAZER ALAN C. Asymptotic Behaviour of Solutions of Periodic Competition Diffusion System[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1989, 13(3): 263-284.

Existence and Stability of Periodic Solutions for Reaction-diffusion Systems with Time Delays

WANG Chang-you[1], *LI Shu-yong*[2]

(1. Institute of Applied Mathematics, Chongqing University of Post and Telecommunication, Chongqing 400065, China

2. College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610066, China)

Abstract: Periodic solutions of reaction-diffusion systems with time delays are investigated. It is constructed that the upper and lower control function of nonmonotone reaction term, and it is showed that the function satisfies a global Lipschitz condition and quasimonotone. A sort of effective method of studying differential equation with nonmonotone reaction term is gained. By using the method of upper and lower solutions and fixed point theorem, it is shown that periodic solutions of this system exist when reaction-term is not monotone and the boundary value system has a pair of coupled-upper and lower solutions. Some methods for proving the stability of the periodic solution are also given. And some known results are extended.

Key words: delay; periodic solution; upper and lower solution; reaction-diffusion system; fixed point theorem; existence and stability

(编辑 陈移峰)