文章编号:1000-582X(2006)12-0116-03

有三对角半正定增量块的对称正定方程组的解*

陈　斌,杨大地
(重庆大学 数理学院,重庆　400044)

摘　要:这篇论文讨论一类迭代,它需求系数矩阵有变化的三对角半正定增量块的对称正定方程组的解.该文把这种半正定的增量块进行了独特分解,给出了一种迭代算法,重复使用这种算法求解上述的问题可以提高计算的效率.吴筑筑曾提出过对角元有正增量的一种迭代算法,该文算法考虑块增量的情形,是对吴筑筑算法的一种推广.

关键词:线性方程组;对称正定矩阵;迭代计算;半正定矩阵;算法 三对角矩阵
中图分类号:O241.6　　**文献标识码**:A

某些数值问题求解需要做迭代计算,每次要解一个系数矩阵只有少量变化线性方程组,如何减少求解方程组的计算量,便成为总体计算效率的关键之一.这类问题经常遇到[1-2],所以提出下列问题:

问题I:设某问题的数值求解过程要作迭代计算,每次迭代计算需解一个线性方程组

$$(A+D)X=b\ ,$$

其中 A 为 n 阶对称正定矩阵. b 为已知向量,D 为一个 n 阶三对角的半正定矩阵,随机变化,而且仅有少数几个元不为0,如何设计算法提高计算效率.

首先对 D 作以下分解:

$$D_1=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & & \\ d_{21} & d_{22} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix},D_i=\begin{pmatrix} & & & \\ & d_{i,i+1} & & \\ & d_{i+1,i} & d_{i+1,i+1} & \\ & & & \end{pmatrix},$$

$i\geqslant 2$,d_{ij}为 D 的 i 行 j 列元,未标出来的都是0元素,那么 $D=D_1+D_2+\cdots+D_{n-1}$.

1　主要结论

定理1　若 A 是正定矩阵,若记 $A_0=A$,$A_i=A_{i-1}+D_i$,$i=1,2,\cdots,n-1$,D_i 为以上定义,那么 A_i 仍是正定矩阵,即 $A_iX=b$ 有解且解唯一.

证明　由于 D 是半正定,所以 D 的顺序主子式半正定.

由 $A_i=A_{i-1}+D_i$,得到 $A_i=A+D_1+\cdots+D_i$,$D_1+\cdots+D_i$ 正好是 D 的 $i+1$ 阶顺序主子式,记为 W,那么 W 是半正定的.于是任意向量 $h=\in R^{1\times n}$,$h^{T}Wh\geqslant 0$,那么由于 A 的正定性,有:

$$h^{T}=(A+W)h>0\ .$$

因此 $A+W$ 是正定的,有 $(A+W)X=b$ 有解且解唯一[3],命题得证.

现在来考察 $A_ix=b$ 的解同 $A^{i-1}X=b$ 的解的关系.

首先考虑

$$(A+C_i)X=b\ ,\tag{1}$$

此时的 C_i 是这样定义的:

$$C_i=\begin{pmatrix} & & & \\ & d_{i,j} & d_{i,i+1} & \\ & d_{i+1,i} & d_{i+1,i+1} & \\ & & & \end{pmatrix},$$

其中 d_{ik}是以上 D 的元,且 $d_{i+1,i}=d_{i,i+1}$.

定理2　设 $AX=b$ 的解为 $X^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$,且 A 的逆矩阵已知为 Y,若(1)有解,那么它可以表示为如下形式:

$$x_i=\frac{(c_{i+1,i+1}+1)x_i^0-c_{i,i+1}x_i^0+1}{m}\ ,\quad x_{i+1}=\frac{(c_{i,i}+1)x_{i+1}^0-c_{i+1,i}x_i^0}{m}$$

,对于其余的有:

* 收稿日期:2006-03-27
作者简介:陈　斌(1982-),男,重庆璧山人,重庆大学硕士研究生,主要研究方向为数值方法及其在经济管理中的应用.

$$x_j = x_j^0 - c_{ji}x_i - c_{j,i+1}x_{i+1}(j \neq i, i+1),$$

其中：

$$c_{ji} = d_{ii}y_{ji} + d_{i,i+1}y_{j,i+1},\ c_{j,i+1} = d_{i+1,i}y_{ji} + d_{i+1,i+1}y_{j,i+1}, \tag{2}$$

特别的，当 $d_{i+1,i} = d_{i,i+1} = 0$，有：

$$\left.\begin{aligned} c_{ji} &= d_{ii}y_{ji} = d_{ii}y_{jt}. \\ c_{j,i+1} &= d_{i+1,i+1}y_{j,i+1} \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

这里 $j = 1,2,\cdots,n$；$y_{i,k}$ 是 $\boldsymbol{Y}$ 的 i 行 k 列元素

$$m = (c_{ii}+1)(c_{i+1,i+1}+1) - c_{i,i+1}c_{i+1,i}, \tag{4}$$

证明　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$，

两边同时乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得到：$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})$，即 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^0$.

由于 $\boldsymbol{C}_i = \begin{pmatrix} & & & \\ & d_{i,j} & d_{i,i+1} & \\ & d_{i+1,i} & d_{i+1,i+1} & \\ & & & \end{pmatrix}$，（未表出的均为 0 元），所以 $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}_i = \begin{pmatrix} c_{1,i} & c_{1,i+1} \\ c_{2,j} & c_{2,i+1} \\ \cdots & \cdots \\ c_{n,i} & c_{n,i+1} \end{pmatrix}$，只有第 i 和 $i+1$ 列不为 0，其余都为 0.

解这个方程组（已知有解），解为：

$x_i = \dfrac{(c_{i+1,i+1}+1)x_i^0 - c_{i,i+1}x_{i+1}^0}{m}$，$x_{i+1} = \dfrac{(c_{i,i}+1)x_{i+1}^0 - c_{i+1,i}x_i^0}{m}$，逐步回代得到：

$$x_j = x_j^0 - c_{ji}x_i - c_{j,i+1}(j \neq i, i+1).$$

注：特别的当 $d_{i,i+1} = 0$，$d_{i,j}$ 且有：

$c\,ji = 0$，$c_{j,i+1} = d_{i+1,i+1}y_{j,i+1}$，

$$m = d_{i+1,i+1}y_{j,i+1} + 1,\ x_{i+1} = \frac{x_{i=1}^0}{d_{i+1,i+1}y_{j,i+1}+1},\ x_j = x_j^0 - c_{j,i+1}x_{i+1},(j \neq i+1). \tag{5}$$

此结论和参考文献[2]结果一致

推论 1　设 A 为对称正定矩阵，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}_i)$ 可逆，$\boldsymbol{C}_i$ 如上面的定义，若 $\boldsymbol{Y}_k^0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的第 k 列，那么 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}_i)$ 的逆矩阵的第 k 列可表示为以下形式：

$$\left.\begin{aligned} y_{i,k} &= \frac{(c_{i+1,i+1}+1)y_{i,k}^0 - c_{i,i+1}y_{i+1,k}^0}{m}, \\ y_{i+1,k} &= \frac{(c_{i,i}+1)y_{i+1,k}^0 - c_{i+1,i}y_{i,k}^0}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$y_{j,k} = y_{j,k}^0 - c_{ji}y_{i,k} - c_{j,i+1}y_{i+1,k},(j \neq i, i+1). \tag{7}$$

其中的，$c_{ji} = d_{ii}y_{j,i}^0 + d_{i+1,i}y_{j,i+1}^0$，$c_{j,i+1} = d_{i,i+1}y_{j,i}^0 + d_{i+1,i+1}y_{j,j+1}^0$，$j = 1,2,\cdots,n$.

$$m = (c_{ii}+1)(c_{i+1,i+1}+1) - c_{i,i+1}c_{i+1,i}$$

证明　由于 $\boldsymbol{Y}_k$ 是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{e}_k$ 的解，而 $\boldsymbol{Y}_k^0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{e}_x$ 的解，按定理 2 的结论得结论成立.

注：当 $d_{i+1,i} = d_{i,i+1} = 0$，$d_{i,j} = 0$ 也有和参考文献[2]一致的结果：

$$y_{j,k} = y_{j,k}^0 - c_{j,i+1}\frac{y_{i+1,k}^0}{d_{i+1,i+1}y_{j,i+1}^0+1},$$

$$c_{j,i+1} = d_{i+1,i+1}y_{j,i+1}^0,\ j = 1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

推论 2　在定理 1 的条件下，设 $\boldsymbol{X}'$ 是 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{Y}'$ 是 $\boldsymbol{A}'$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{y}_{jk}^i$ 是 $\boldsymbol{Y}^i$ 的 $\boldsymbol{j}$ 列的第 $\boldsymbol{k}$ 个元，那么 $\boldsymbol{A}_{i+1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}(i \geqslant 0)$ 的解可以表示为下面形式：

$$x_i^{i+1} = \frac{(c_{i+1,i+1}+1)x_i^i - c_{i,i+1}x_{i+1}^i}{m},$$

$$x_{i+1}^{i+1} = \frac{(c_{i,i}+1)x_{i+1}^i - c_{i+1},i}{x_i^i}, \tag{9}$$

$$x_j^{i+1} = x_j^i - c_{ji}x_i^{i+1} - c_{j,i+1}x_{i+1}^{i+1},(j \neq i, i+1), \tag{10}$$

$$c_{ji} = d_{i,i+1}y_{j,i+1}^i(i \geqslant 1),\ c_{ji} = d_{i,i}y_{ji}^i + d_{i,i+1}y_{j,i+1}^i,(i=0)$$

$$c_{j,i+1} = d_{i,i+1}y_{ji}^i + d_{i+1,i+1}y_{j,i+1}^i,\ j = 1,2,\cdots,n.$$

$$m = (c_{ii}+1)(c_{i+1,i+1}+1)c_{i,i+1}c_{i+1,j}.$$

定理 3　由于 $\boldsymbol{D}$ 是半正定三对角矩阵，那么如果按（$*$）式对 $\boldsymbol{D}$ 的分解，对于任意的 $\boldsymbol{D}_i$，如果 $d_{i+1,i+1}$ 或者 $d_{i,i}$ 为 0，那么 $d_{i,i+1} = 0$.

证明　因 $\boldsymbol{D}$ 为半正定矩阵且为三对角矩阵，如果存在由（$*$）分解的 $\boldsymbol{D}_i$ 中，$d_{i+1,i+1} = 0$，而 $d_{i,i+1} \neq 0$，那么，可以找到 $h_0 \in R^{1\times n}$，使得 $\boldsymbol{h}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_1 + \cdots + \boldsymbol{D}_i)\boldsymbol{h}_0 <$[3]，与 $\boldsymbol{D}$ 顺序主子式的半正定性相矛盾.

2　算法及算例

算法（问题 I 的算法）

Step1 计算 A 的 cholesky 分解式，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$，并求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{X}^0$

Step2 利用 $\boldsymbol{A}$ 的 cholesky 分解式，求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_j = \boldsymbol{e}_j$ 的解，$\boldsymbol{Y}_j^0$，$j = 1,2,\cdots,n$.

即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 j 个列向量，$j = 1,2,\cdots,n$.

Step3 由具体要求确定 $\boldsymbol{D}_j$，$i = 1,2,\cdots,n-1$，同时由定理 3 除去 $\boldsymbol{D}_i = 0$，重新得到它的非 0 分解，记为 $\boldsymbol{D}_{ik}$，$k = 1,2,\cdots,r$.

同时令 $I_k = \{j \mid j$ 为 $\sum_{m=k}^{r}\boldsymbol{D}_{i,m}$ 某一个非 0 元所对应的列$\}$，

令 $k = 0$，$\boldsymbol{Y}_j^{i0} = \boldsymbol{Y}_j^0(j \in I_1)$.

Step4　4.1　判断 k 是否小于 $r+1$，如果是进入 4.2，如果不是转 Step5；

4.2　如果只有 d_{i_k+1,i_k+1} 非 0，那么进入 4.2.1；

其余的则进入4.22;

4.2.1 如果 $k<r-1$ 且 $D_{i_{k+1}}=D_{i_{k+1}}$,则 :$Y_j^{i_k}=Y_j^{i_{k-1}}(j\in I_{K+1})$,$X^{i_k}=X^{i_{k-1}}$,$D_{i_{k+1}}=D_{i_{k+1}}+D_{i_k}$,$k=k+1$,转4.1;如果 $D_{ik+1}\neq D_{i_{k+1}}$,那么按照(7)计算 $Y_j^{i_k}(j\in I_{k+1})$,按照(4)计算 X^{i_k},$k=k+1$,转4.1;如果 $k=r$,按照(4)计算 X^{i_k}转 Step5.

4.2.2 由(2)式或者(2.1)计算 $c_{ji},c_{j,i+1}$,$j=1,2,\cdots n$,由(3)计算 m 的值;

4.2.2.1 如果 $k<r-1$,由(5),(6)计算 $Y_j^{i_k}(j\in I_{k+1})$;

4.2.2.2 由(8)(9)计算 X^{i_k},$k=k+1$,转4.1.

Step5 进行问题Ⅰ的迭代,如果满足问题Ⅰ的条件,则停止,否则转 Step3 不考虑迭代,问题Ⅰ特举例如下:

例1 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&5&3\\1&3&3\end{bmatrix}$,$b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$,$D=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

求$(A+D)X=b$.

解:1.求 A 的 cholesky 分解式 ,得到:$L=\begin{bmatrix}1&&\\1&2&\\1&1&1\\&&\end{bmatrix}$,

然后求 $AX=b$ 的解 X^0:得到 $X^0=(0,-0.5,1.5)^T$.

2.利用 A 的 cholesky 分解式,求 A^{-1},得到:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1.5&0&-0.5\\0&0.5&-0.5\\-0.5&-0.5&1\end{bmatrix}.$$

3.求 $c_{j1},c_{j,2}$的值 $c_{11}=4.5$,$c_{12}=1.5$,$c_{22}=1$,$c_{31}=-2$,$c_{32}=1.5$.

求得 $m=10.25$,解得

$$x=\frac{(c_{2,2}+1)x_1^0-c_{1,2}x_2^0}{m}=$$

$$\frac{(1+1)\times 0-1.5\times(-0.5)}{10.25}=0.073\ 1,$$

$$x_2=\frac{(c_{1,1}+1)x_2^0-c_{2,1}x_1^0}{m}=$$

$$\frac{(4.5+1)\times(-0.5)-0.5\times 0}{10.25}=-0.268\ 2,$$

$$x_3=x_3^0-c_{3,1}x_1-c_{3,2}x_2=1.5-(-2)\times 0.073\ 1-(-1.5)\times(-0.2682)=1.243\ 9.$$

故解得:$x=(0.073\ 1,-0.268\ 2,1.243\ 9)^T$,与用 Cholesky 分解法求解结果一致

例2 $A=\begin{bmatrix}6&2&3&3\\2&7&2&1\\3&2&9&1\\1&1&1&5\end{bmatrix}$,,$b=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&5&2\\0&0&2&1\end{bmatrix}$,求$(A+D)X=b$ 的解.

解得:$x=(0.161\ 4,0.381\ 0,0.103\ 2,0.965\ 6)^T$,与用 Cholesky 分解法求解结果一致.

3 算法的效率分析

设问题Ⅰ中的迭代次数为 N,为每次迭代时直接用 Cholesky 分解法求解所需要的乘除计算量(包括开方),则 $Q_0=Nn(n+1)(n+8)/6$[4-5]. 如果用 Q_1 为本文算法的相应计算量,当 D 如(*)分解成 r 个非0的 D_m,那么:

$$Q_1\leqslant n(n+1)(n+8)/6+n^2(n+1)+N[6n+n(r^2-r)+5n(r-1)].$$

注意:取等时候是当非0的 D_m 的次对角线都有非0元的时候,本文的算法中对非0的 D_m 的次对角线都是0元的时,做了合并(如4.2.1所述)减少了计算量.

令 $s=(Q_0-Q_1)/Q_0$,当 N 很大时候,s 趋于 $1-6(r^2+4r+1)/[(n+1)(n+8)]$,当 $r/n<0.40$ 时候,s 是大于0的,也就是说本文算法对于问题Ⅰ较常规方法有效.特别的,有如下特殊情形:

当三对角元增量 D 如(*)分解成 r 个非0的 D_m,$D_m(m=1,2,\cdots,r)$ 刚好两两合并形如 C_i 的形式,而且 C_i 的四个元均非0元,则有:

$$Q_1=n(n+1)(n+8)/6+n^2(n+1)+N(n(r^2/2+2r))$$

当 N 很大时候,s 趋于 $1-6(r^2/2+2r)/[(n+1)(n+8)]$,所以当 $r/n<0.58$ 时候,s 是大于0的,算法与参考文献[2]的算法效率相当.

参考文献:

[1] 何炳生.解一类二次规划的投影方法[J].高等计算数学学报,1990,12(1):24-37.

[2] 吴筑筑. m个对角元有正增量的对称正定方程组的解[J].高等计算数学学报,2001,23(2):181-185.

[3] 北京大学数学系.高等代数[M].北京:高等教育出版社,1989.

[4] 杨大地,谈骏渝.实用数值分析[M].重庆:重庆大学出版社,2000.

[5] FORAYTHE G E, MOLER C B. Computer Solution of Linear Algebraic Systems [M]. Prentice-Hall, ENGLEWOOD CLIFFS:1967.

(下转第121页)

Normal Families Of Meromorphic Functions Concerning Differentional Polynomials

SHANG Hai-tao , JIANG Yun-bo

(College of mathematics and physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Suppose that R be a family of meromorphic functions in a domain D, $n, k(n \geq k+1)$ be positive integers, and b be a finite complex number, $a_0(z), a_1(z), \cdots a_{k-1}(z)$ are holomorphic functions. If $\forall f \in R$, all zeros of f are of multiplicity at least n, the poles of f are multiple and $L_{(f)} = b \Rightarrow f = b$, where $L_{(f)}(z) = f^{(k)}(z) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(z) f^{(i)}(z)$, then R is normal in D.

Key words: meromorphic function; holomorphic function; normal family

(编辑　陈移峰)

(上接第 118 页)

Solving the Symmetric Positive Definitesystems of Linear Equations Which Have Positive Semi-definite Tri-diagonal Matrix Increments

CHEN Bin, YANG Da-di

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: This paper deals with a kind of iterations, which need to solve the symmetric positive definite systems of linear equations whose matrices of coefficients have varying positive semi-definite tri-diagonal martrix increments. The positive semi-definite tri-diagonal martrix increment is especially divided, an iterative algorithm is presented. It to use the algorithm in the iterative process of repeatedly solving above mentioned system. Wu Zhuzhu has presented an algorithm for diagonal elements with positive increments. The algorithm of this paper which takes martrix increments into account, is the generalization of the algorithm presented by Wu Zhuzhu.

Key words: system of linear equations; symmetric positive definite matrix; iterative computations; symmetric positive semi-definite matrix; algorithm, tri-diagonal martrix

(编辑　张小强)