文章编号:1000 - 582X(2006)12 - 0119 - 03

与微分多项式相关的亚纯函数的正规族*

尚 海 涛,姜 云 波

(重庆大学 数理学院,重庆　400030)

摘　要:设 R 为区域 D 上的一族亚纯函数,$n,k(n\geq k+1)$ 均为正整数,b 为一有限非零复数,$a_0(z)$,$a_1(z),\ldots,a_{k-1}(z)$ 为 D 上的全纯函数,若对 R 中的任意函数 f,f 在 D 内的零点重数至少为 n,f 的极点重数至少为 2,且 $L_{(f)}=b\Rightarrow f=b$,其中 $L_{(f)}(z)=f^{(k)}(z)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z)f^{(i)}(z)$,则 R 在 D 内正规.

关键词:亚纯函数; 全纯函数; 正规族

中图分类号:O174.52　　**文献标识码**:A

1　主要结果

文中使用值分布中常用的记号及术语,为了叙述方便,设 $a_0(z),a_1(z),\cdots,a_{k-1}(z)$ 均在 D 内全纯,$L_{(f)}(z)=f^{(k)}(z)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z)f^{(i)}(z)$,$R$ 为区域 D 上一族亚纯函数.

20 世纪初,P. Montel 引进了正规族的概念,并建立如下正规定则.

定理 A　设 R 为区域 D 内一族全纯函数,若对族中每个 $f(z)$ 在 D 内恒有 $f\neq 0,f\neq 1$,则族 R 在 D 内正规[1].

1935 年,Miranda 推广了定理 A,证明了:

定理 B　设 R 为区域 D 内一族全纯函数,k 为一正整数,若对族中每个 $f(z)$ 在 D 内恒有 $f\neq 0,f^{(k)}\neq 1$,则族 R 在 D 内正规[2].

1979 年,顾永兴对定理 B 进行了推广,证明了如下一个曾被 Hayman 猜测的正规定则.

定理 C　设 R 为区域 D 内一族亚纯函数,k 是一正整数,若 $\forall f\in R$,有 $f\neq 1,f(k)\ \pm 1$ 则 R 在 D 内正规[3].

后来,王跃飞对定理 C 进行了推广,证明了

定理 D　设 R 为区域 D 内一族亚纯函数,$n,k(n\geq k+1)$ 是 2 个正整数,$\forall f\in R$ 有 f 的零点重数均 $\geq n$,f 的极点重数均 ≥ 2 且 $f^{(k)}\neq 1$,则 R 在 D 内正规[4].

文中进行了进一步思考,推广了定理 D 的结果,证明了:

定理 1　设 R 为区域 D 内一族亚纯函数,$n,k(n\geq k+1)$ 是 2 个正整数,b 是一有限非零复数,$\forall f\in R$ 有 f 的零点重数均 $\geq n$,f 的极点重数均 ≥ 2 且 $L_{(f)}=b\Rightarrow f=b$,则 R 在 D 内正规.

推论 1　设 R 为区域 D 内一族亚纯函数,$n,k(n\geq k+1)$ 是 2 个正整数,b 是一有限非零复数,$\forall f\in R$ 有 f 的零点重数均 $\geq n$,f 的极点重数均 ≥ 2 且 $f^{(k)}=b\Rightarrow f=b$,则 R 在 D 内正规.

定理 2　设 R 为区域 D 内一族亚纯函数,$n,k(n\geq k+2)$ 是 2 个正整数,b 是一有限非零复数,$\forall f\in R$ 有 f 的零点重数均 $\geq n$ 且 $L_{(f)}=b\Rightarrow f=b$,则 R 在 D 内正规.

推论 2　设 R 为区域 D 内一族亚纯函数,$n,k(n\geq k+2)$ 是 2 个正整数,b 是一有限非零复数,$\forall f\in R$ 有 f 的零点重数均 $\geq n$ 且 $f^{(k)}=b\Rightarrow f=b$,则 R 在 D 内正规.

定理 3　设 R 为区域 D 上一族全纯函数,$n,k(n\geq k+1)$ 是 2 个正整数,b 是一有限非零复数,$\forall f\in R$ 有 f 的零点重数均 $\geq n$ 且 $L_{(f)}=b\Rightarrow f=b$,则 R 在 D 内正规.

推论 3　设 R 为区域 D 上一族全纯函数,$n,k(n\geq k+1)$ 是 2 个正整数,b 是一有限非零复数,$\forall f\in R$ 有的零点重数均 $\geq n$ 且 $f^{(k)}=b\Rightarrow f=b$,则 R 在 D 内正规.

2　几个引理

为了证明定理 1 至定理 3,需要如下引理.

引理 1　设 R 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,k 是一正整数,R 中每个函数的零点重数至少为 k,假设存在 $A\geq 1$,使得当 $f=0$ 有 $|f^{(k)}|\leq A$,则若 R 在内 Δ 不

* 收稿日期:2006 - 06 - 21
作者简介:尚海涛(1980 -),男,河南新乡人,重庆大学硕士研究生,主要从事值分布方向研究.

正规,则对于 $0\le\alpha\le k$ 存在一函数列 $f_j\in R$,一复数列 $z_j\in\Delta$ 及一正数列 $\rho_j\to0^+$ 使得 $g_j(z)=\rho_j^{-\alpha}(z_j+\rho_j z)$ 在复平面上内闭一致收敛于非常数的亚纯函数 $g(z)$,$g(z)$ 的零点重数至少为 k,满足 $g^{\#}(z)\le g^{\#}(0)=kA+1$[5].

引理 2 设 $R(z)$ 为非常数有理函数,k 为一正整数,b 为一有限非零复数,若 $R(z)$ 的零点重数均 $\ge k+1$ 且 $R^{(k)}(z)\ne b$,则 $R(z)=\dfrac{(\gamma z+\delta)^{k+1}}{\alpha z+\beta}$. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均为常数且 $\alpha\gamma\ne0$[4].

引理 3 设 k 为一正整数,f 是有穷级超越亚纯函数且其零点的重数均 $\ge k+1$,则 $f^{(k)}$ 取任何有限非零复数无穷多次[6].

引理 4 一个正规亚纯函数的级至多为 2,一个正规整函数的级至多为 1[7].

3 定理的证明

定理 1 的证明:假设 R 在 D 内不正规,不妨设 D 为 Δ,则有引理 1,对于 $\alpha=k$ 存在一函数列 $f_j\in R$,一复数列 $z_j\in\Delta$ 及一正数列 $\rho_j\to0^+$ 使得 $g_j(\zeta)=\rho_j^{-k}f_j(z_j+\rho_j\zeta)$ 在复平面 C 上内闭一致收敛于非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$,$g(\zeta)$ 的零点重数均 $\ge k+1$,$g(\zeta)$ 的极点重数均 ≥2 且满足 $g^{\#}(\zeta)\le g^{\#}(0)=kA+1$. 由引理 4 知 $g(\zeta)$ 为有穷级亚纯函数.

以下证明 $g^{(k)}(\zeta)\ne b$.

首先证明 $g^{(k)}(\zeta)$ 不恒为 b,若 $g^{(k)}(\zeta)\equiv b$,则 $g(\zeta)$ 为 k 次多项式,又因为 $g(\zeta)$ 的零点重数至少为 $k+1$,矛盾.

假设 $\exists\zeta_0$ 使得 $g^{(k)}(\zeta_0)=b$,则 $g(\zeta)\ne\infty$. 因此 $\exists\delta>0$ 使得 $g(\zeta)$ 在 $D_f=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<\delta\}$ 上全纯,从而当 j 充分大时 $g_j^{(i)}(\zeta)$ 在 D_δ 上全纯且 $g_j^{(i)}(\zeta)$ 在 D_δ 上一致收敛于 $g^{(i)}(\zeta)$($i=0,1,2,\cdots,k-1$,$g^{(0)}(\zeta)=g(\zeta)$ 以下同).

由 $g_j(\zeta)=\rho_j^{-k}f_j(z_j+\rho_j\zeta)$ 得 $f_j^{(i)}(z_j+\rho_j\zeta)=\rho_j^{k-i}g_j^{i}(\zeta)$

当 j 充分大时,$g_j^{(i)}(\zeta)$ 在 D_δ 上全纯. 又因为 $a_i(z)$ 在 Δ 上全纯,$|z_j|<r\le1$,$\lim\limits_{j\to\infty}\rho_j=0$,故在 D_δ 上当 j 充分大时一致的有 $|a_i(z_j+\rho_j\zeta)|\le M\left(\dfrac{1+r}{2},a_i(z)\right)<\infty$,注意到 $k-i>0$,故函数

$\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_i(z_j+\rho_j\zeta)\rho_j^{k-i}g_j^{(i)}(\zeta)$ 在 D_δ 上一致地趋于零.

因而 $L_{(f_j)}(z_j+\rho_j\zeta)=f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)+\sum\limits_{i=0}^{k-1}a_i(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(i)}(z_j+\rho_j\zeta)$

$$=g_j^{(k)}(\zeta)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z_j+\rho_j\zeta)\rho_j^{k-i}g_j^{(i)}(\zeta)\to g^{(k)}(\zeta)$$

$g^{(k)}(\zeta_0)=b$,由 Hurwitz 定理,$\exists\zeta_j\to\zeta_0$,当 j 充分大时有

$L_{(f_j)}(z_j+\rho_j\zeta_j)=b$,由 $L_{(f)}=b\Rightarrow f=b$ 得 $f_j(z_j+\rho_j\zeta_j)=b$

所以 $g_j(\zeta_j)=\rho_j^{-k}f_i(z_j+\rho_j\zeta)=\rho_j^{-k}b$

$g(\zeta_0)=\lim\limits_{j\to\infty}g_j(\zeta_j)=\lim\limits_{j\to\infty}\rho_j^{-k}b=\infty$,这与 $g^{(k)}(\zeta_0)=b$ 矛盾.

所以 $g^{(k)}(\zeta)\ne b$. 以下分 2 种情况进行讨论:

1) $g(\zeta)$ 不为有理函数,否则,由引理 2 知 $g(\zeta)=\dfrac{(\gamma\zeta+\delta)^{k+1}}{\alpha\zeta+\beta}$,与 $g(\zeta)$ 的极点重数均 ≥2 矛盾.

2) $g(\zeta)$ 不为有穷级超越亚纯函数,否则,由引理 3 知 $g^{(k)}(\zeta)=b$ 有解,与 $g^{(k)}(\zeta)\ne b$ 矛盾.

综上所述 $g(\zeta)$ 必为常数,矛盾. 故 R 在 Δ 内正规.

定理 2 和定理 3 与定理 1 的证法类似,从略.

参考文献:

[1] MONTEL, P. Lecons sur les familles notmales de fonctions analytiques et leur applicaeions, Coll[S]. Borel, 1927.

[2] MIRANDA, C. Sur un nouveau critere de normalite pour les familles des fonctions holomorphes, Bull. Sci [J]. Math france, 1935, 63, 185 - 196.

[3] GU Y. A normal criterion of meromorphic families. Scientia Sinica, Mathematical issue[J]. 1979, 267 - 274.

[4] WANG YUE - FEI, FANG MING-LIANG. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros[J]. Acta Math. Sinica, New Series, 1998, 14(1): 17 - 26.

[5] PANG XUE-CHENG, ZALCMAN L. Normal families and shared values[J]. Bull. London Math. Soc., 2000, 3: 325 - 331.

[6] BERGWEILER W, EREMENKO A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order[J]. Rev. Mat. Iberoamericana, 1995, 11: 355 - 373.

[7] CLUNIE J, HAYMAN W. The spherical derivative of integral and meromorphic functions [J]. Comment Math. Helv., 1960, 40: 117 - 148

Normal Families Of Meromorphic Functions Concerning Differentional Polynomials

SHANG Hai-tao , JIANG Yun-bo
(College of mathematics and physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Suppose that R be a family of meromorphic functions in a domain D, $n,k(n\geq k+1)$ be positive integers, and b be a finite complex number, $a_0(z)$, $a_1(z)$, $\cdots a_{k-1}(z)$ are holomorphic functions. If $\forall f\in R$, all zeros of f are of multiplicity at least n, the poles of f are multiple and $L_{(f)}=b\Rightarrow f=b$, where $L_{(f)}(z)=f^{(k)}(z)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i(z)f^{(i)}(z)$, then R is normal in D.

Key words: meromorphic function; holomorphic function; normal family

(编辑　陈移峰)

(上接第 118 页)

Solving the Symmetric Positive Definitesystems of Linear Equations Which Have Positive Semi-definite Tri-diagonal Matrix Increments

CHEN Bin, YANG Da-di
(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: This paper deals with a kind of iterations, which need to solve the symmetric positive definite systems of linear equations whose matrices of coefficients have varying positive semi-definite tri-diagonal martrix increments. The positive semi-definite tri-diagonal martrix increment is especially divided, an iterative algorithm is presented. It to use the algorithm in the iterative process of repeatedly solving above mentioned system. Wu Zhuzhu has presented an algorithm for diagonal elements with positive increments. The algorithm of this paper which takes martrix increments into account, is the generalization of the algorithm presented by Wu Zhuzhu.

Key words: system of linear equations; symmetric positive definite matrix; iterative computations; symmetric positive semi-definite matrix; algorithm, tri-diagonal martrix

(编辑　张小强)