

文章编号:1000-582X(2006)04-0054-04

无网格方法在动力学中的应用*

赵光明^{1,2}, 宋顺成², 杨显杰²

(1. 安徽理工大学 资源开发与管理工程系, 安徽 淮南 232001; 2. 西南交通大学 应用力学与工程系, 四川 成都 610031)

摘要:再生核质点法是近几年研究出的一种新型无网格方法,该方法具有只需要质点信息无需划分单元的无网格特性,具有计算优势.介绍了再生核质点法,并将其应用到非线性动力学研究.动力学过程涉及多重非线性,假设动力学中变形属于小变形情况,同时考虑材料非线性的前提下,通过引入增量型的材料本构模型,采用完全 Lagrangian 计算格式,推导了动力学的再生核质点法计算控制方程.通过算例验证了该方法在动力学问题中的有效性.

关键词:再生核质点法;无网格法;动力学;非线性

中图分类号: O347

文献标识码: A

动力学问题在国民经济和科学技术发展中有着广泛的应用领域.动力学问题主要有两大类研究对象^[1],一类是运动状态下的工作的机械或构件,承受着本身的惯性与周围介质结构的动力载荷,如何保证它们的平稳性及结构的安全性极为重要;另一类是承受动力载荷作用的工程结构,如何设计分析这类结构,在理论和实际上都具有重要意义.动力学问题中,位移、应力、应变等物理量都是时间的函数.对动力学问题研究的数值方法主要有有限元法、边界元法以及无网格方法.无网格方法是近些年出现和发展的新型数值方法,主要有光滑质点流体动力学法(SPH)^[2]、模糊单元法(DEM)^[3]、无网格伽辽金法(EFGM)^[4]、无网格局部伽辽金法(MLPGM)^[5]、再生核质点法(RKPM)^[6-8]、自然单元法(NEM)^[9]等方法.

RKPM 是一种新型的无网格法,只需将求解区域布置着质点,不需要单元和网格,对于大变形畸变问题不需要重划分网格便能求解,此外质点的布置不受区域的影响,在不连续求解域问题如裂纹、缺口区域也巧妙的得到解决,目前 RKPM 已经在诸多领域得到广泛应用^[10].

笔者对 RKPM 的理论进行了研究,并借鉴 RKPM 在处理大变形问题的显著优点,利用 RKPM 来对动力学问题进行分析,在小应变情况下引入增量形式本构关系,建立了非线性动力学的离散型计算控制方程,并

利用自编的程序对具体问题进行了数值分析,取得了较为满意的结果.

1 再生核质点法

在 Liu 等人提出了再生核质点法^[6-8]思想中,对于任意函数(x)通过引入修正函数(Correction function)构造的再生核函数近似为

$$u^R(x) = \int_{\Omega} C(x; x-y) \Phi_a(x-y) u(y) dy, \quad (1)$$

$x(x_1, x_2, x_3)$ 表示任意一点, $u^R(x)$ 是函数 $u(x)$ 的再生函数, Φ_a 是核函数, a 是膨胀系数,方程式(1)称为再生方程.修正函数可以构造为

$$C(x; x-y) = \sum_{i=0}^N r_i(x) (x-y)^i = r^T(x) H(x-y), \quad (2)$$

上式中

$$H^T(x-y) = [1 \quad x_1 - y_1 \quad x_2 - y_2 \quad x_3 - y_3, \quad (x_1 - y_1)^2 \cdots (x_3 - y_3)^N] \quad (3)$$

$$r^T(x) = [r_0(x) \quad r_1(x) \quad \cdots \quad r_N(x)], \quad (4)$$

根据 Liu 的理论可以得到再生核质点法插值的离散形式

$$u^R(x) \cong \sum_{i=1}^{NP} C(x; x-x_i) \Phi_a(x-x_i) \Delta V_i u_i = \sum_{i=1}^{NP} \phi_i u_i, \quad (5)$$

* 收稿日期:2005-11-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10372086);安徽省高校省级自然科学基金项目(2006-KJ007C)

作者简介:赵光明(1976-),男,安徽桐城人,安徽理工大学讲师,西南交通大学博士研究生,研究方向为高速冲击动力学.

$$\phi_l(x) = H^T(0)M^{-1}(x)H(x-x_l)\Phi_a(x-x_l)\Delta V_l, \quad (6)$$

$$M(x) = \int_{\Omega} H(x-y)H^T(x-y)\Phi_a(x-y)dy, \quad (7)$$

以上两式中的 ΔV_l 表示质点 x_l 的体积, NP 表示质点总数.

核函数 Φ_a 通常可选用多种函数形式, 笔者采用三次样条 B 函数, 即对于一维问题

$$\Phi_a(x-x_l) = \frac{1}{a}f\left(\frac{|x-x_l|}{a}\right), \quad (8)$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4|z|^2 + r|z|^3, & 0 \leq |z| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4|z| + 4|z|^2 - \frac{4}{3}|z|^3, & \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由此可见核函数 $\Phi_a \geq 0, x-a \leq x_l \leq x+a$ 称为核函数的支持域, 大小取决于膨胀系数 a . 对于二维和三维问题, Φ_a 可由一维问题的核函数进行拓展, 则

$$\Phi_a(x-x_l) = \prod_{i=1}^{N_d} \frac{1}{a_i} f\left(\frac{|x_i-x_{li}|}{a_i}\right) \quad (9)$$

N_d 表示空间维数, a_i 表示第 i 维的膨胀系数.

2 动力学再生核质点法

采用 Lagrangian 描述, 如果已知离散时间 $0 \quad \Delta t \quad 2\Delta t \quad \dots \quad t$ 时刻时的状态, 利用虚位移原理建立 $t + \Delta t$ 时刻的动力学平衡方程

$$\int_{t+\Delta t_V} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_{t+\Delta t_V} \sigma_{ij} \delta_{i+\Delta t} e_{ij} dV = \int_{t+\Delta t_V} b_i \delta u_i dV + \int_{t+\Delta t_\Gamma} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma, \quad (10)$$

式中, ρ 表示 $t + \Delta t$ 时刻的密度; \ddot{u} 为加速度; b, \bar{t} 分别表示作用在物体上的外力和面力; σ_{ij} 是 Cauchy 应力张量分量; e_{ij} 是无穷小应变张量分量.

假设外力和面力的方向和数值不依赖物体在 $t + \Delta t$ 时刻的位形, 可以采用时刻位形进行定义, 则式 (10) 可以表示成

$$\int_{V_0} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_{V_0} S_{ij} \delta_0^{\Delta t} \varepsilon_{ij} dV = \int_{V_0} b_i \delta u_i dV + \int_{\Gamma_0} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma, \quad (11)$$

式中, ρ 表示 0 时刻的密度; $S_{ij}, \delta_0^{\Delta t} \varepsilon_{ij}$ 分别是 $t + \Delta t$ 时刻但在 0 时刻位形中定义的 Kirchhoff 应力张量和 Green 应变张量分量, 对于上式可采用类似有限元的处理方法, 将其转化成

$$\int_{V_0} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_{V_0} S_{ij} \delta_0 \varepsilon_{ij} dV + \int_{V_0} S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} dV =$$

$$\int_{V_0} b_i \delta u_i dV + \int_{\Gamma_0} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma - \int_{V_0} S_{ij} \delta_0 e_{ij} dV, \quad (12)$$

式中, S_{ij} 是 Kirchhoff 应力张量分量; S_{ij} 为其增量; Green 应变增量 e_{ij} 可以写成线性部分 e_{ij} 和非线性部分 η_{ij} . 在小应变情况下, 假设材料是非线性的, 采用增量型本构关系

$$d^t S_{ij} = {}^t_0 D_{ijkl} d^t \varepsilon_{kl}, \quad (13)$$

式中, d 表示微分; ${}^t_0 D_{ijkl}$ 是 t 时刻位形并参考于 0 时刻位形的本构张量. 将再生核质点法加速度的插值式

$$\ddot{u}^R(x) = \sum_{l=1}^{NP} \phi_l(x) \ddot{u}_l, \quad (14)$$

将式 (5)、(13) 代入到式 (12) 中, 可以得到小应变情况下非线性动力学计算的再生核质点法控制方程

$$M \ddot{u} + Ku = \Delta f, \quad (15)$$

式中:

$$M_{ij} = \int_{V_0} \rho \phi_i \phi_j I dV, \quad (16)$$

$$K = {}^t_0 K_L + {}^t_0 K_{NL}, \quad (17)$$

$$\Delta f = f_{ext} - f_{int}, \quad (18)$$

$$({}^t_0 K_L)_{ij} = \int_{V_0} ({}^t_0 B_L)_i^T \cdot {}^t_0 D \cdot ({}^t_0 B_L)_j dV, \quad (19)$$

$$({}^t_0 K_{NL})_{ij} = \int_{V_0} ({}^t_0 B_{NL})_i^T \cdot Q \cdot ({}^t_0 B_{NL})_j d\Omega, \quad (20)$$

$$(f_{ext})_i = \int_{V_0} \phi_i^T b_i d\Omega + \int_{\Gamma_0} \phi_i^T \bar{t}_i d\Omega, \quad (21)$$

$$(f_{int})_i = \int_{V_0} ({}^t_0 B_L)_i^T \cdot R d\Omega, \quad (22)$$

其中 I 为单位向量, 对于二维问题以上几式中

$$({}^t_0 B_L)_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \\ \varpi \frac{\phi_i}{x_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$({}^t_0 B_{NL})_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \\ \varpi \frac{\phi_i}{x_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$\omega = \begin{cases} 1 & \text{轴对称} \\ 0 & \text{平面应变} \end{cases}$, 轴对称问题应力向量和应力矩阵分别为

$$R = \begin{bmatrix} {}^i_0S_{11} \\ {}^i_0S_{22} \\ {}^i_0S_{12} \\ {}^i_0S_{33} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$Q = \begin{bmatrix} {}^i_0S_{11} & {}^i_0S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}^i_0S_{12} & {}^i_0S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^i_0S_{11} & {}^i_0S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}^i_0S_{12} & {}^i_0S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^i_0S_{33} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

平面问题 ${}^i_0S_{33} = 0$.

3 算例

根据前文的分析,作者编制了动力学无网格方法程序,可以计算小应变情况下非线性动力学问题,现以 Taylor 撞击动力学过程分析为例进行介绍.

一铜弹以某一初速度垂直撞击刚性平面,几何和物理参数为:长度 $L = 32.4 \text{ mm}$,直径 $D = 6.4 \text{ mm}$,弹性模量 $E = 117 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu = 0.35$,密度 $\rho_0 = 8930 \text{ kg/m}^3$,屈服强度 $\sigma_s = 400 \text{ MPa}$,初始撞击速度为 187 m/s ,材料为理想弹塑性.利用轴对称模型来模拟动力学过程,计算域内布置质点,采用高斯点积分,径向和轴向的膨胀系数分别是 2 mm 和 3.5 mm .图 1 给出了撞击过程不同时刻的变形图,虚线表示撞击前弹体轴线截面,圆圈表示质点的位置.图 2 给出了撞击过程中不同时刻的应力分布图,从图中可以看出,撞击初期的高应力区集中在弹头部分,随着撞击时间的延长,高应力区向弹体中间部分转移,这是由于塑性波的影响导致.

为了比较并验证本程序结果的精确性,笔者也利用有限元法 ANSYS 软件对算例进行分析,采用轴对称模型,划分成单元布置,其余参数相同.图 3 为撞击过程中弹头中心 A 点的速度变化图,从图中可以看出,两者动力学分析的结果较为一致.数据结果表明撞击过程持续时间相差 1.2% .

4 结论

对再生核质点法的基本理论及其在动力学中的应用作了分析研究.在小应变情况下,将再生核质点法引入非线性动力学分析,并采用完全 Lagrangian 计算格式.通过对 Taylor 撞击动力学过程实例分析表明,再生核质点法在非线性动力学分析中是有效的、可行的,计

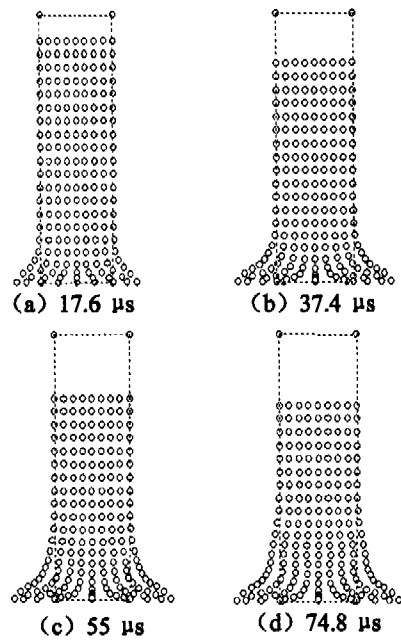


图 1 不同时刻弹体的变形图

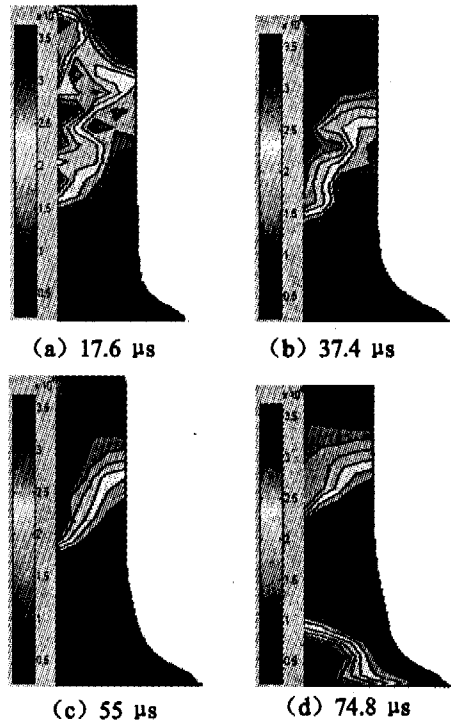


图 2 不同时刻 Mises 等效应力云图

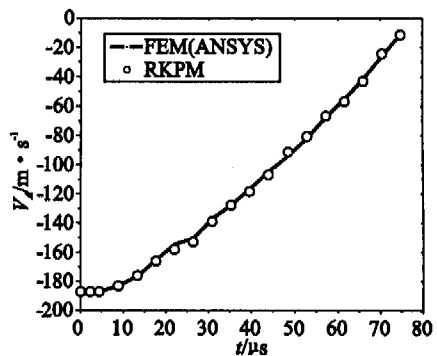


图 3 冲击过程中质点 A 的速度

算精度较高.再生核质点法的突出优点是不需要划分单元,只需要质点信息,这样在处理不断增加结点、不断更新网格等问题中时独具魅力,因此该方法在处理动力学问题上将具有重要意义.

参考文献:

- [1] 王勳成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2003.
- [2] LUCY L. A Numerical Approach to the Testing of Fission Hypothesis[J]. A J,1977,82:1 013 -1 024.
- [3] NAYROLES B,TOUZOT G,VILLON P. Generalizing the Finite Element Method:Diffuse Approximation and Diffuse Elements [J]. Computational Mechanics, 1992, 10 (5): 307 - 318.
- [4] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element Free Galerkin Methods[J]. Int J Numer Methods Engng, 1994, 37 (2): 229 - 256.
- [5] ARLURI S N,ZHU T. A New Meshless Local Pretrov-galerkin Approach in Computational Mechanics[J]. Computational Mechanics, 1998,22(2):117 - 127.
- [6] LIU W K, JUN S, ZHANG Y F. Reproducing Kernel Particle method[J]. Int J Numer Methods Fluids, 1995, 20: 1 081 - 1 106.
- [7] LIU W K, JUN S, LI S F, et al. Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics[J]. Int J Numer Methods Engng, 1995, 38: 1 655 - 1 679.
- [8] LIU W K, WU Y C, ZOU G P, et al. Elasto-plasticity Revisited: Numerical Analysis Via Reproducing Kernel Particle Method and Parametric Quadratic Programming [J]. Int J Numer Methods Engng, 2002, 55: 669 - 683.
- [9] SUKUMAR N, MORAN B, BELYTSCHKO T. The Natural Element Method in Solid Mechanics [J]. Int J Numer Methods Engng, 1998, 43 (5): 839 - 887.
- [10] 周进雄,李梅娥,张红艳.再生核质点法研究进展[J].力学进展,2002,32(4):535 - 544.

Application of Meshless Method in Dynamic Mechanics

ZHAO Guang-ming^{1,2}, SONG Shun-cheng², YANG Xian-jie²

(1. Department of Resource Exploration and Management Engineering,
Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: As a new type of meshless method which has appeared in recent years, the Reproducing Kernel Particle Method has such meshless features as the need for nodes only without classified units, and is advantageous in the process of calculation. The present study introduces the Reproducing Kernel Particle Method and applies it to the research of nonlinear dynamic mechanics. The dynamic process involves different kinds of nonlinearity. The study assumes that deformation of dynamic analysis belongs to small one and that the material nonlinearity has been taken into account. When under small strain, the increment constitutive law and the total Lagrangian model of calculation are adopted to deduce the dynamic control equation by the Reproducing Kernel Particle Method. The instances of calculation demonstrate that this method is effective in the analysis of dynamic problems.

Key words: reproducing kernel particle method; meshless method; dynamic; nonlinearity

(编辑 张小强)