2006 年 4 月 第 29 卷第 4 期
重庆大学学报(自然科学版)
Journal of Chongqing University(Natural Science Edition)
Apr. 2006 Vol.29 No.4

文章编号:1000-582X(2006)04-0126-03

R^N 上部分耗散反应扩散方程吸引子的正则性讨论*

蒲学科,张兴友
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘 要:主要致力于全欧氏空间上部分耗散反应扩散方程的解的长时间行为的研究,证明了该方程的紧吸引子的存在性,同时对该吸引子的正则性做了详细的研究.发现该方程组的吸引子实际上是 $H^1\times L^2$ 的紧集,它吸引 $L^2\times L^2$ 中的有界集,这大大提高了 B Wang 关于该方程组吸引子的正则性结果,即此吸引子具有更高的正则性.由于方程本身的复杂性,这已经是关于这类方程组的吸引子正则性可能的最好的结果.

关键词:正则性;吸引子;部分耗散;反应扩散方程
中图分类号:O175 **文献标识码**:A

1 引言及预备知识

众所周知,吸引子是描述无穷维动力系统的长时间行为的有力工具.近年来,关于部分耗散反应扩散方程的无穷维行为,特别是对这类方程在无界区域上的研究已经引起人们的极大兴趣,并已经得到了许多很好的结果,如文献[1]证明了方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+\lambda u+h(u)+\alpha v=f,\\&\frac{\partial v}{\partial t}+\delta v-\beta u=g,\\&u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ x\in R^n,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

的紧的$(L^2\times L^2-L^2\times L^2)$吸引子的存在性.但由于问题本身的复杂性,目前已有的结果略显得有些粗糙,文中将证明此类方程的吸引子实际上是属于$(L^2\times L^2-H^1\times L^2)$的,即吸引子本身是 $H^1\times L^2$ 的紧集,它吸引 $L^2\times L^2$ 中的有界集.即对(1)的解$(u(t),v(t))=\pi(t,(u(0),v(0)))$决定的半流(semiflow)$\pi$,将证明:

定理 半流 π 在 $L^2\times L^2$ 中具有全局吸引子,且该吸引子是 $H^1\times L^2$ 中的紧集.

由于方程本身的结构,这是能够得到的关于此吸引子的正则性的最好的结果.为了符号的简洁,在文中出现的 L^2 等 Sobolev 空间均是定义在全空间上的.在方程组(1)中,$\nu,\lambda,\delta v>0$,$f,g\in L^2(R^n)$ 给定,α,β 满足$\alpha\beta>0$,h为非线性函数满足:对任意的$s\in R$成立 $h(s)s\geq 0,h(0)=0,h'(s)\geq -C$,并且 $|h'(s)|\leq C(1+|s|^r)$,其中当 $n\leq 2$ 时 $r\geq 0$;当 $n\geq 3$ 时 $r\leq\min(\frac{4}{n},\frac{2}{n-2})$,$C$ 为一正常数.

为了证明的需要,把文献[1]的相关结论概述如下

引理 1 在上述条件下,有

1) 存在常数 $K\geq 0$,使得对任意 $R>0$ 存在依赖于 R 的时刻 $T(R)$,只要$(u,v)\in L^2\times L^2$ 且 $\|(u,v)\|\leq R$ 时,$\|\pi(t,(u,v))\|_{H^1\times L^2}\leq K$ 对任意 $t\geq T(R)$ 成立;

2) 对任意的 $R>0$,存在和 R 有关的常数 $K(R)>0$,使得如果$(u,v)\in H^1\times L^2$ 且 $\|(u,v)\|_{H^1\times L^2}\leq R$,则 $\|\pi(t,(u,v))\|_{H^1\times L^2}\leq K(R)$对任意的 $t\geq 0$ 成立.

关于此引理的证明,可以参考文献[1].

利用该引理,并结合文献[2]中熟知的标准结果,很容易得到文献[1]中的主要结果,即此类方程具有紧$(L^2\times L^2-L^2\times L^2)$的吸引子.

2 吸引子的存在性和正则性

下面对解作出估计,并由此建立起半流 π 在 $H^1\times L^2$ 中的渐进紧性.之所以这样是因为一旦建立了渐进紧性,结合引理 1,便可以立即得到关于此吸引子正则性的论断,即此类方程的吸引子实际上是属于$(L^2\times L^2-H^1\times L^2)$的.

为了对解作出估计,先定义双线性形式

* 收稿日期:2005-12-10
作者简介:蒲学科(1981-),男,四川南充人,重庆大学硕士研究生,主要研究方向为偏微分方程.

$$a(u,v):=\int_{R^n}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}x,\ 其中\ u,v\in H^1.$$

如此定义的双线性形式 $a(u,v)$ 唯一地确定了一个自伴线性算子 $A:D(A)\subset L^2\to L^2$，定义 $Au:=\omega$，其中 $u\in D(A)$，$D(A)$ 由 $D(A):=\{u\in H^1\mid\exists\omega\in L^2$ 使得对 $a(u,v)=\langle\omega,v\rangle$ 任意的 $v\in H^1$ 成立$\}$确定. 自伴线性算子 $-A$ 是线性算子 $e^{-At},t\geqslant0$ 的解析半群的生成元，并对所有的 $u\in L^2$ 以及所有的 $t\geqslant0$ 有估计

$$\|e^{-At}u\|\leqslant Me^{at}\|u\|,$$

及

$$\|e^{-At}u\|_{H^1}\leqslant Me^{at}t^{-1/2}\|u\|,$$

其中 M 和 a 是两个正的常数.

众所周知，方程组(1)等价于积分方程

$$\left.\begin{aligned}u(t)&=e^{-At}u_0+\int_0^t e^{-A(t-s)}(-\lambda u-\hat{h}(u)-\alpha v+f)\mathrm{d}s,\\ v(t)&=e^{-\delta t}v_0+\int e^{-\delta(t-s)}(\beta u+g)\mathrm{d}s,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中，$u_0=u(0)$，$v_0=v(0)$. 在叙述并证明引理3之前，先对解作出一些必要的估计. 设 (u,v) 和 (u_0,v_0) 是由不同初值出发的两条轨线，由(1)可知

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(u-u_0)}{\partial t}-\nu\Delta(u-u_0)+\lambda(u-u_0)+\\ h(u)-h(u_0)+\alpha(v-v_0)=0,\\ \dfrac{\partial(v-v_0)}{\partial t}+\delta(v-v_0)-\beta(u-u_0)=0,\end{cases}$$

对此式分别用 $\beta(u-u_0)$ 和 $\alpha(v-v_0)$ 做内积，并在 $[0,s]$ 上对时间 t 积分，可以得到如下两式：

$$\int_0^s\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta\|u-u_0\|^2)+\beta\nu\|D(u-u_0)\|^2+\beta\lambda\|(u-u_0)\|^2+\beta(h(u)-h(u_0),u-u_0)+\beta\alpha(v-v_0,u-u_0)\mathrm{d}t=0,$$

和

$$\int_0^s\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\|v-v_0\|^2)+\alpha\delta\|v-v_0\|^2-\alpha\beta(u-u_0,v-v_0)\mathrm{d}t=0.$$

在这里，将 $u(t),u_0(t),v(t),v_0(t)$ 分别简写为 u,u_0,v,v_0，在下文中也这样简写，不再说明.

注意到 $h'(s)\geqslant-C$，可以得到 $-(h(u)-h(u_0),u-u_0)\leqslant C\|u-u_0\|^2$，将上面两式相加，并将此式代入可以得到

$$(\beta\|u(s)-u_0(s)\|^2+a\|v(s)-v_0(s)\|^2)\leqslant(\beta\|u(0)-u_0(0)\|^2+\alpha\|v(0)-v_0(0)\|^2)+C\int_0^s\beta\|u-u_0\|^2+\alpha\|v-v_0\|^2\mathrm{d}t,$$

运用 Gronwall 不等式可以知道

$$(\beta\|u(s)-u_0(s)\|^2+a\|v(s)-v_0(s)\|^2)\leqslant C\|u(0)-u_0(0)\|^2+\|v(0)-v_0(0)\|^2),\tag{3}$$

其中常数只和时间 T 有关.

为了建立 π 的渐进紧性，先给出下述2个引理

引理2　由 $u\mapsto h\circ u$ 定义的映射 $\hat{h}:H^1\to H^1$ 是定义在 H^1 中有界集上的 Lipschitz 映射.

此引理的证明见参考文献[3].

引理3　设 (u_n,v_n) 为 $H^1\times L^2$ 中的点列，$(u,v)\in H^1\times L^2$，又假设 (u_n,v_n) 在 $H^1\times L^2$ 中弱收敛于 (u,v)，且在 $L^2\times L^2$ 中强收敛于 (u,v). 则在时间段 $[t_0,t_1]$ 中，$\pi(t,(u_n,v_n))$ 在 $H^1\times L^2$ 中一致地强收敛于 $\pi(t,(u,v))$，其中 $t_0>t_1>0$ 为任意的实数.

证明　令 $t_1>0$ 为固定的正实数. 由于集合 $\{(u_n,v_n)_{n\in N}\}\cup\{(u,v)\}$ 为 $H^1\times L^2$ 中的有界序列，由引理1可知，存在 $R>0$，使得对于任意的 $t\in[0,t_1]$，任意的 $n\in N$ 有 $\|\pi(t,(u_n,v_n))\|_{H^1\times L^2}\leqslant R$ 以及 $\|\pi(t,(u,v))\|_{H^1\times L^2}\leqslant R$ 成立. 记 L 为 $\hat{h}$ 在 H^1 中以 R 为半径的球上的 Lipschitz 常数，同时记 $(u(t),v(t))=\pi(t,(u(0),v(0)))$. 则对 $(u(t),v(t))$，$t\in[0,t_1]$，有

$$\begin{cases}u(t)=e^{-At}u(0)+\displaystyle\int_0^t e^{-A(t-s)}(-\lambda u-\hat{h}(u)-\alpha v+f)\mathrm{d}s,\\ v(t)=e^{-\delta t}v(0)+\displaystyle\int_0^t e^{-\delta(t-s)}(\beta u+g)\mathrm{d}s,\end{cases}$$

成立，对 $(u_n(t),v_n(t))$ 有类似的式子成立.

这样，对 $t\in[0,t_1]$，得到

$$\|u_n(t)-u(t)\|_{H^1}\leqslant Me^{at_1}t^{-1/2}\|u_n-u\|+M(\lambda+L)e^{at_1}\int_0^t(t-s)^{-1/2}\|u_n(s)-u(s)\|_{H^1}\mathrm{d}s+Me^{at_1}\int_0^t(t-s)^{-1/2}\|v_n(s)-v(s)\|\mathrm{d}s,$$

将式(3)代入，并利用奇异的 Gronwall 不等式（参考文献[4]）可知存在仅依赖于 λ,L,M,a,t_1 的常数 C[5-6]，使得对于 $t\in[0,t_1]$，有

$$\|u_n(t)-u(t)\|_{H^1}\leqslant Me^{at_1}t^{-1/2}\|u_n-u\|+CMe^{at_1}\int_0^t(1+(t-s)^{-1/2})s^{-1/2}\|u_n(s)-u(s)\|\mathrm{d}s+Me^{at_1}\int_0^t(t-s)^{-1/2}\|v_n(s)-v(s)\|\mathrm{d}s,$$

即

$$\|u_n(t)-u(t)\|_{H^1}\leqslant C(1+t^{-1/2})\|u_n-u\|+C\|v_n(s)-v(s)\|,$$

由此式和(3)立即可知命题成立. 证毕.

定理4　π 在 $H^1\times L^2$ 的强拓扑下是渐进紧的.

证明　要证明 π 在 $H^1\times L^2$ 的强拓扑下是渐进紧的，即要证明：$(u_n,v_n)_{n\in N}$ 为 $H^1\times L^2$ 中的有界点列，且

$(t_n)_{n\in N}$为趋于无穷的正实数序列,则存在严格递增的数列(n_k)及$(\bar{u},\bar{v})\in H^1\times L^2$使得当$k\to\infty$时,在$H^1\times L^2$中有$\pi(t_{n_k},(u_{n_k},v_{n_k}))\to(\bar{u},\bar{v})$.

固定正数$T>0$,由命题可知存在n_0,使得当$n>n_0$时,$t_n>T$. 同时由序列(u_n,v_n)在$H^1\times L^2$中的有界性,利用引理(1)可知,$\pi(t_n-T,(u_n,v_n))_{n\geq n_0}$在$H^1\times L^2$中也有界,于是存在$(\bar{u},\bar{v})\in H^1\times L^2$,使得$\pi(t_{n_k}-T,(u_{n_k},v_{n_k}))\xrightarrow{w}(\bar{u},\bar{v})$,另外由引理1可知此子列满足$\pi(t_{n_k}-T,(u_{n_k},v_{n_k}))\to(\bar{u},\bar{v})\in L^2\times L^2$. 由引理3$\pi(t_{n_k},(u_{n_k},v_{n_k}))=\pi(T,\pi(t_{n_k}-T,(u_{n_k},v_{n_k})))\to\pi(T,(\bar{u},\bar{v}))\in H^1\times L^2$. 证毕.

在得到π在$H^1\times L^2$中的渐进紧性后,又由引理1可知在$H^1\times L^2$中存在有界吸收集,利用参考文献[2]中的定理,立即可以得到主要定理.

定理5 半流π具有紧的$(L^2\times L^2-H^1\times L^2)$吸引子.

参考文献:

[1] BERNAL A R, WANG B. Attractors for Partly Dissipative Reaction Diffusion Systems in R^N[J]. J Math Anal Appl, 2000, 252:790-803.

[2] TEMAM R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanical and Physics [M]. New York: Springer-verlag, 1997.

[3] PRIZZI M. A Remark on Reaction-diffusion Equations in Unbounded Domains[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2003,9(3):281-286.

[4] HENRY D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics[M]. Berlin: Springer-verlag, 1981,840.

[5] BABIN A V, VISHIK M I. Attractors of Partial Differential Evolution Equations in an Unbounded Domains[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1990,116: 221-243.

[6] WANG B. Attractors for Reaction Diffusion Equations in Unbounded Domains[J]. Phys D, 1999, 128:41-52.

Regularity of Attractors of Partly Dissipative Reaction Diffusion Equations on R^n

PU Xue-ke, ZHANG Xing-you

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: This paper deals with the large time behavior of the solutions of partly dissipative reaction diffusion equations on R^N. The authors prove the existence of compact attractors and show that the attractors are indeed compact sets in $H^1\times L^2$, which absorb bounded sets in $H^1\times L^2$. This greatly improves the results obtained by B Wang, and due to the complexities of the equations itself, this is the best possible result on the regularity of the attractor.

Key words: regularity; attractor; partly dissipative; reaction-diffusion equation

(编辑 张小强)