文章编号:1000-582X(2006)06-0075-03

# 线性超树的孤立点与悬挂边数目*

龚 劬,何 静
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

**摘 要**:在先通过引入线性超树的对应二部树的特殊对应性质来刻划超树的顶点与超边的结构,得出了线性超树的孤立点数目的计算公式和一系列推论,从而进一步揭示了度序列与线性超树的关系. 然后给出了求线性超树悬挂边数目的可行算法,其算法复杂度仅为 $O(|E(T)|^2)$. 这对于充实超树的计数理论与应用实践均是有益的.

**关键词**:线性超树;孤立点;悬挂边;二部树
**中图分类号**:O157.5 **文献标识码**:A

## 1 基本概念

超图是图的概念的推广,超树是树的概念的推广,它们用"图的语言"描述了集合系统. 对于研究图所采用的方法和所得到的结论,可以做适当的变化和改进运用到超图的研究中来[1]. 笔者研究一类特殊超图(线性超树)的悬挂点及悬挂边数目.

**定义 1**[2] 二元组 $H=(V,E)$ 为一个超图,如果 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是有限集,$E=\{E_i \mid i=1,2,\cdots,m\}$ 是 $V$ 的一个子集簇,其中 $E_i\neq\phi$,$1\leqslant i\leqslant m$,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i=V$. $|V|=n$ 称为超图 $H=(V,E)$ 的阶,$V$ 中的元素称为顶点,$E$ 中的元素称为边. 若 $E_i\in E$ 且 $|E_i|=1$,则称 $E_i$ 为环.

在超图 $H=(V,E)$ 中,与顶点 $v$ 关联的边的数目称为顶点 $v$ 的度,记为 $d(v)$ 或 $\deg(v)$. 分别用 $\delta(H)$,$\Delta(H)$ 表示超图中顶点的最小度和最大度,其中 $\delta H=\min\limits_{v\in V}d(v)$,$\Delta H=\max\limits_{v\in V}d(v)$;用 $\delta'(H)$,$\Delta'(H)$ 表示超图中顶点的次最小度和次最大度,即除所有 $\delta(H)$,$\Delta(H)$ 外剩余顶点的最小度数和最大度数;

**定义 2**[3] $T$ 称为超树,如果超图 $T$ 是连通且不含有圈的. 如果对于超树 $T$ 中任意两条不同的超边 $E_i$ 和 $E_j$,都有 $|E_i\cap E_j|\leqslant 1$,则称 T 为线性超树.

在超树中把度数为 1 的顶点称为孤立点,而把度数大于 1 的顶点称为分枝点. 把线性超树中的边 $Ei$ 称为悬挂边,如果 $|E_i|\geqslant 2$ 且 $E_i$ 中恰有一点是 $E_i$ 与其它超边的公共点.

**定义 3**[4] 超图 $H=(X,E)$ 的对应二部图为 $G(H)=(Y_1,Y_2,E)$(这里 $Y_1,Y_2$ 是 $G$ 的两部分顶点集,$E$ 是边集),其中 $Y_1=X$,$Y_2=E$,(即把超图 $H=(X,E)$ 中的边 $E_i$ 看成是 $G(H)$ 中 $Y_2$ 的点),在 $G(H)$ 中两点 $x_i\in Y_1$,$E_j\in Y_2$ 之间连一条边当且仅当在 $H$ 中 $x_i\in E_j$.

**定义 4**[3] 线性超树的对应的二部图称为对应的二部树.

超图的二部图是研究超图性质的有力工具,它将图与超图联系了起来.

**引理 1**[5] 设线性超图 $H=(X,E)$ 有 $n$ 个顶点,$m$ 条边,$c$ 个连通分支. 超图 $H=(X,E)$ 不含圈当且仅当存在下列等式:

$$\sum_{i=1}^{m}(|E_i|-1)=n-c.$$

**引理 2**[6] $T$ 是线性超树当且仅当 $G(T)$ 是树.

**引理 3**[6] 若 $T=(V,E)$ 是线性超树,无环且 $\forall E_i\in E$ 有 $|E_i|\geqslant 2$,则 $T$ 至少有 2 条悬挂边.

## 2 主要结果

### 2.1 关于线性超树孤立点数目的结论

**定理 1** 设有 $m$ 条边的无环线性超树 $T$ 的度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,则 $T$ 的孤立点总数为:

$$g(T)=\sum_{i=1}^{m}d_iu_i-2\sum_{i=1}^{n}u_i+n-m+1,$$

其中 $u_i=\begin{cases}1 & \text{若 } d_i>1\\ 0 & d_i=1\end{cases}$,$i=1,2,\cdots,n$.

证明:由引理 2 可知线性超树 $T$ 的对应二部图 $G(T)$ 是树. 要计算 $T$ 的孤立点总数,只需要计算中度数 $G(T)$

---

* 收稿日期:2006-03-01
作者简介:龚劬(1963-),女,四川人,重庆大学教授,研究方向为组合优化与图论,小波分析,图象处理.

为 1 的顶点的数目. 因此考察条边,度序列为($d_1,d_2,\cdots,d_n$)的无环线性超树 $T$,其对应二部图的顶点数目为:$n+m$.

由于二部树 $G(T)$ 中共有 $\sum_{i=1}^{n}u_i+m$ 个分枝点,显然由这些分枝点构成的树 $G(T)$ 的点导出子图共有 $\sum_{i=1}^{n}u_i+m-1$ 条边. 任意一条这样的边在树 $G(T)$ 中分别为两个不同的分枝点各贡献一度,因此 $\sum_{i=1}^{n}u_i+m-1$ 条边共为分枝点贡献 $2(\sum_{i=1}^{n}u_i+m-1)$ 度.

而 $G(T)$ 的分枝点的总度数 $\sum_{i=1}^{n}d_i\,u_i+\sum_{i=1}^{m}|E_i|$ 等于 $G(T)$ 中所有与 1 度点相关联的边对分枝点贡献的度数与由分枝点构成的点导出子图中所有的边对分枝点贡献的度数之 $2(\sum_{i=1}^{n}u_i+m-1)$ 之和 .

故有

$$g(T)=\sum_{i=1}^{n}d_iu_i+\sum_{i=1}^{m}|E_i|-2(\sum_{i=1}^{n}u_i+m-1)\ . \quad (1)$$

对于线性超树 T 而言,其连通分支数 $c=1$,由引理 1 可得出:

$$\sum_{i=1}^{m}(|E_i|-1)=n-1,\ 即\sum_{i=1}^{m}|E_i|=n+m-1 \quad (2)$$

把式(2)带入可得:$g(T)=\sum_{i=1}^{n}d_iu_i+\sum_{i=1}^{m}|E_i|-2(\sum_{i=1}^{n}u_i+m-1)=\sum_{i=1}^{n}d_iu_i+n+m-1-2\sum_{i=1}^{n}u_i-2m+2=\sum_{i=1}^{n}d_iu_i-2\sum_{i=1}^{n}u_i+n-m+1$ .

至此,定理 1 得证.

**推论 1** 设有 $n$ 个顶点,$m$ 条边的无环线性超树的分枝点度序列为($d_1',d_2',\cdots,d_k'$),则 $T$ 的孤立点总数为:

$$g(T)=\sum_{i=1}^{k}d_1'-2k+n-m+1\ .$$

推论 1 的证明由分枝点的定义及定理 1 易知.

**推论 2** 设 $k$ 是一个自然数,$T$ 是一棵有 $n$ 个顶点,$m$ 条边的无环线性超树,它的最大度数为 $\Delta(T)$. 如果 $T$ 含有 $k$ 个最大度点,且顶点的次最小度数为 $\delta'(T)$,则至少含有 $K(\Delta-\delta')+(\sum_{i=1}^{n}u_i+m)(\delta'-2)+2$ 个孤立顶点.

证明:由定理 1 可知

$$g(T)=\sum_{i=1}^{n}d_iu_i+\sum_{i=1}^{m}|E_i|-2(\sum_{i=1}^{n}u_i+m-1)\ge k\Delta+(\sum_{i=1}^{n}u_i+m-k)\delta'2-\sum_{i=1}^{n}u_i-2m+2=k(\Delta-\delta')+(\sum_{i=1}^{n}u_i+m)(\delta'-2)+2\ .$$

**推论 3** 设 $T$ 是由 $c$ 棵无环线性超树构成的有 $m$ 条边的线性超林,其度序列为($d_1,d_2,\cdots,d_n$),则 $T$ 的孤立点总数为:

$$g(T)=\sum_{i=1}^{n}d_iu_i-2\sum_{i=1}^{n}u_i+n-m+c\ ,$$

其中 $u_i=\begin{cases}1若\ d_i>1\\0若\ d_i>1\end{cases}$ ,$i=1,2,\cdots,n$ .

推论 3 的证明由线性超林的定义及定理 1 易知.

根据定理 1 的结论,不难推出下述定理 2.

**定理 2** 设有度序列为($d_1,d_2,\cdots,d_n$),满足关系式 $\sum_{i=1}^{n}u_i(d_i-1)-m+1=0$,其中 $u_i=\begin{cases}1若\ d_i>1\\0若\ d_i>1\end{cases}$,$i=1,2,\cdots,n$ ,且 $m\le n-1$,则存在一棵有 $m$ 条边的无环的线性超树恰好以($d_1,d_2,\cdots,d_n$)为其度序列(且这样的 $T^*$ 不唯一);进一步,如果无环连通线性超图 $H$ 以满足上述关系式的($d_1,d_2,\cdots,d_n$)为其度序列,则 $H$ 必是一棵无环的线性超树.

证明:1)要构造无环的线性超树 $T^*$,只需要构造出以($d_1,d_2,\cdots,d_n,d_{n+1},\cdots d_{n+m}$)为度序列的对应二部树 $G(T^*)$,其中 $d_{n+j}\ge2,j=1,\cdots,m$. 因此首先要确定 $m$ 和($d_{n+1},d_{n+2},\cdots d_{n+m}$),由于已知等式成立,故有 $m=\sum_{i=1}^{n}u_i(d_i-1)+1$,且 $m\le n-1$,而由引理 1 可知 $\sum_{i=1}^{m}d_{n+i}=\sum_{i=1}^{m}|E_i|=n+m-1$,由此可任意确定一组满足上述等式的数 $d_{n+1},d_{n+2},\cdots,d_{n+m}$,且 $d_{n+j}\ge2,j=1,\cdots,m$.

(a)令 $w=\sum_{i=1}^{n}u_i$,在 $n+m$ 个顶点中任意取 $h=w+m$ 个顶点$\{v_1,\cdots,v_w,\cdots,v_h\}$作出一棵分别以顶点$\{v_1,\cdots,v_w\}$,$\{v_{w+1},\cdots,v_h\}$为不同部的二部树 $G(T^*)$,具体作法如下:(1)由已知等式有 $m-w=\sum_{i=1}^{n}u_i(d_i-1)+1-\sum_{i=1}^{n}u_i=\sum_{i=1}^{n}u_i(d_i-2)+1>0$,故可在$\{v_{w+1},\cdots,v_h\}$中取 $w+1$ 个点,不妨设为$\{v_{w+1},\cdots,v_{2w+1}\}$,把$\{v_{w+1},\cdots,v_{2w+1}\}$、$\{v_1,\cdots,v_w\}$中的点顺次连接,这样就够成了一棵只有 2 个 1 度点的树 $\bar{T}$,且这 2 个 1 度点属于点集$\{v_{w+1},\cdots,v_{2w+1}\}$,即 $\bar{T}=(\bar{V},\bar{E})$,$\bar{V}=\{v_1,\cdots,v_{2w+1}\}$,$\bar{E}=\{v_{w+1},v_i,v_iv_{w+1+i}\}\,|\,i=1,\cdots,w|$;(2)由 $\bar{T}$ 有 $\sum_{i=1}^{w}dv_i=2w$,而由已知等式有 $m-(w+1)=\sum_{i=1}^{n}u_i(d_i-2)=\sum_{i=1}^{n}u_id_i-2w$,所以为了使得$\{v_1,\cdots,v_w\}$中点的度数饱和,即$\{d_{v_i}|i=1,\cdots,w\}=\{d_j|d_j>=1,j=1,\cdots,n\}$,可以在 $\bar{T}$ 的基础上根据点要到达的度数把$\{v_1,\cdots,v_w\}$中的点与剩余的 $m-(w+1)$ 个点$\{v_{2w+2},\cdots,v_h\}$相连;显然由步骤(1)、(2)作出的图是二部树,并且 $d_{v_{w+1}}\in\{1,2\}$,$i=1,\cdots,m$;

(b)将 $G(T^*)$ 中的其余 $n+m-h$ 个顶点分成 $m$ 个集合 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 并且使它们满足:$|V_i|=d_{n+i}-d_{v_{w+i}}$, $i=1,\cdots,m$;

(c)将 $V_i$ 里的所有点与顶点 $vw+i$, $i=1,2,\cdots,m$ 相连;

至此,得出了以$(d_1,d_2,\cdots,d_n,d_{n+1},\cdots,d_{n+m})$为其度序列的二部树 $G(T^*)$,再根据 $G(T^*)$ 可得出对应的以$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$为其度序列的线性超树 $T^*$. 显然,以$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$为其度序列的线性超树可以不唯一.

2)假设无环连通线性超图 $H$ 以满足上述关系式的$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$为其度序列,但 $H$ 不是一棵无环的线性超树. 考察 $H$ 对应的二部图可得出:

$$n+m-1<E(G(H))=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}d_i+\sum_{i=1}^{m}|E_i|),\quad(2)$$

又因为

$$\sum_{i=1}^{n}d_i=\sum_{i=1}^{n}d_iu_i+(n-\sum_{i=1}^{n}u_i)\ ,\quad(3)$$

而由已知关系式有

$$\sum_{i=1}^{n}d_iu_i=\sum_{i=1}^{n}u_i+m-1,\quad(4)$$

把式(4)带入式(2)化简得到

$$\sum_{i=1}^{n}d_i=n+m-1\ ,\quad(5)$$

又由引理1有

$$\sum_{i=1}^{m}d_i|E_i|=n+m-1\ .\quad(6)$$

所以把式(5)、(6)带入式(2)有

$$n+m-1<E(G(H))=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}d_i+\sum_{i=1}^{m}|E_i|)=n+m-1\ .$$

至此产生矛盾. 综上可知,以满足已知关系式的$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$为其度序列的无环连通超图 $H$ 必是一棵无环的线性超树.

### 2.2 求线性超树悬挂边数目的算法

如下给出计算无环线性超树的悬挂边数目的算法:

设有无环线性超树 $T=(V,E)$ 且 $\forall E_i\in E$ 有 $|E_i|\geq 2$,用 $X(T)$ 表示其悬挂边总数,用 $S_0$ 表示 $T$ 中任意的一条路的边集合,由引理3可令 $X_0(S_0)=2$. 算法步骤如下:

第1步:从 $T$ 中任意确定 $S_0$,令 $S=S_0$,则由这 $|S_0|$ 条边生成 $T$ 的边导出子图 $S$ 有2条悬挂边,即是 $X(S)=X_0(S_0)=2$,令 $n=0$;

第2步: $\forall E_i\in E(T)-2$,判断 $E_i$ 是否与 $S$ 相交,如果是转第三步,否则重新确定边 $E_i$;

第3步:若 $E_i$ 是与 $S$ 的除悬挂边的孤立点以外的某一点相连,则 $X(S)=X(S)+1,S=S\cup E_i,n=n+1$;转第五步,否则转第4步;

第4步:若 $E_i$ 是与 $S$ 的悬挂边的某一孤立点相连,则 $X(S)=X(S),S=S\cup E_i,n=n+1$;

第5步:重复第二至第4步直到 $n=|E(T)-S_0|$ 时停止. 此时的 $S=E(T),X(T)=X(S)$ 即为所求.

下面粗约地估计一下该算法的时间复杂性. 本算法的主要计算步骤是第2步到第4步的循环. 对于 $|E(T)-S|$ 中的任意一条超边,它要与已经找到的路 $S$ 中的 $|S|$ 条边分别比较,来判断它是与 $S$ 的除悬挂边的孤立点以外的某一点相连还是与悬挂边的某一孤立点相连,故需要 $|E(T)-S||S|$ 步. 因而该算法最多需要计算 $\frac{|E(T)|^2}{2}$ 步,算法的复杂度为 $0(|E(T)|^2)$,能够在计算机上实现.

例:求无环线性超树 $T=(\{1,2,\cdots,13\},\{E_1,E_2,\cdots,E_6\}$ 的悬挂边总数,其中 $E_1=\{1,2,3\}$, $E_2=\{3,4,5\}$, $E_3=\{5,6,7\}$, $E_4=(3,8,11)$, $E_5=\{8,9,10\}$, $E_6=\{11,12,13\}$.

1)从 $T$ 任意确定 $S_0=E_2,E_3,E_4$,令 $S=S_0$,则由这3条边生成的边导出子图有2条悬挂边,即是 $X(S)=X_0(S_0)=2$. 转2;

2)令 $n=0$,由于 $E_1$ 与 $S$ 有交点3,而顶点3是 $S$ 的除悬挂边的孤立点以外的任意一点,所以 $X(S)=3,S=\{E_1,E_2,E_3,E_4\},n=1$.

3)在 $E(T)-S$ 中找出任意一边,不妨设为 $E_5$,由于 $E_5$ 与 $S$ 有交点8,而顶点8是 $S$ 的悬挂边的孤立点,所以 $X(S)=3,S=\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\},n=2$.

4)继续在 $T-S$ 中找出任意一边 $E_6$,由于 $E_6$ 与 $S$ 有交点11,而顶点11是 $S$ 的除悬挂边的孤立点以外的任意一点,所以 $X(S)=4,S=\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6\},n=3$.

5)此时 $n=|E(T)-S_0|=3$,停止.

从而得出无环线性超树的悬挂边总数为:$X(T)=X(S)=4$.

## 3 结　语

在应用线性超树的结构进行具体问题分析时,由于其规模大和复杂性高的特征,常常不容易清楚地了解它的内部结构,而通过引入对应的二部树来研究线性超树,对线性超树的结构表示、存储及运算等方面都是十分有利的. 笔者在此基础上研究了度序列与线性超树的关系,同时得出了计算复杂度仅为的求线性超树悬挂边数目的可行算法.

(下转第86页)

# Normal Families of Meromorphic Functions

YANG Pai
(College of Methematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract**: Let $F$ be a family of meromorphic functions in a domain $D$, let $k \geq 2$, $m$ be two positive in tegers. Let $a \neq 0$, $b$ be two finite complex numbers; and let $c(z)$ be a function holomorphic in $D$ such that $c(z) \neq 0$ for $z \in D$. If, for every $f \in F$, all zeros of $f(z)$ have multiplicity $\geq m$, the number of all poles of $f'(z)$ in $D$ is at most $m$ and $f(z) = a \Rightarrow f(z) = b$, $f(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = c(z)$, $f'(z) = c(z) \Rightarrow |f^{(k)}(z)| \leq h$, then $F$ is normal in $D$.

**Key words**: meromorphic function; normal family; uniform convergence

(编辑 张小强)

(上接第 77 页)

**参考文献**:

[1] BUNDY A , MURTY R. Graph Theory with Application [M]. London and Elsevier : The Macmillan press, 1976.

[2] 卜月华,张克民. 超图 - 有限集合的组合学[M]. 南京:东南大出版社,2002.

[3] 单志龙,柳柏濂. 严格非匀称线性超树的计数公式[J]. 应用数学学报,2002,25(3):455 - 459.

[4] BERGE C Hypergraphs. Combinatorics of Finite Sets[M]. North - Holland: Amsterdam, 1989.

[5] 李春明,崔鸿. 超图的超树及其算法研究[J]. 内蒙古工业大学学报,1994,13(2):58 - 62.

[6] 单志龙. 超图的计数[D]. 广州:华南师范大学,2001. 1 - 5.

[7] 农庆琴. 度序列与树中的叶子数[J]. 云南:云南大学学报,2002,24(3):167 - 171.

# Isolated Vertice and Hang Edge Number of the Linear Hypertree

GONG Qu, HE Jing
(College of Science and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract**: This paper puts forward another path in proving process. By using bipartite tree special property to depict the vertices and edges of linear hypertree , the authors obtain the counting formula and a series inferences of the linear hypertree isolated vertices , thus further the relation of degree sequence and linear hypertree are given. Then they give out the algorithm of hang-edges , and the calculated complexity of algorithm is $O(|E(T)|^2)$. This is beneficial for the hypertree counting theories and the practice.

**Key words**: linear hypertree ; isolated vertice ; hang edge , bipartite tree.

(编辑 张小强)