文章编号:1000 - 582X(2006)06 - 0082 - 02

分担值与正规定则*

关大伟,罗乾鹏
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘 要:设 F 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族, a 为非零复数, k 为一正整数. 笔者证明了如果对任意的 $f\in F$,$f\neq 0$,f 和 $f^{(k)}$ 在 Δ 上 IM 分担 a,则 F 在 Δ 上正规.

关键词:亚纯函数;分担值;正规定则
中图分类号:O174.52 **文献标识码**:A

1 引言及主要结果

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为单位圆盘 Δ 上的两个非常数亚纯函数,如果 $f(z)-c$ 与 $g(z)-c$ 在 Δ 上有相同零点(不计重数),这里 c 为有限复数,则 c 称为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 Δ 上的 IM 分担值,或者说 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 Δ 上 IM 分担 c.

关于函数族的正规定则,根据著名的 Bloch 法则,人们从已知的 Picard 型定理已经证得了很多漂亮的结果(参见文献[1]). 另一方面,函数的唯一性研究也取得了丰硕的成果(参见文献[2]). 但是,从函数的唯一性定理(公共值定理)去建立正规定则也是很有意义的.

Schwich 是首先把分担值与正规定则联系起来的,他证明了

定理 A[3] 设 F 为区域 G 上的亚纯函数族,a_1, a_2, a_3 为三个互不相同的复数. 如果对任意的 $f\in F$,a_1, a_2, a_3 为 f 与 f' 的 IM 分担值,则 F 在 G 上正规.

庞学城和 Lawence Zalcman 证明了下面的定理:

定理 B[4] 设 F 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,a_1, a_2 为互相判别的复数. 如果对任意的 $f\in F$,a_1,a_2 为 f 与 f' 的 IM 担值,则 F 在 Δ 上正规.

笔者证明了

定理 设 F 为单位圆盘 Δ 上的一个亚纯函数族,a 为非零复数, R 为一正整数. 若对任意的 $f\in F$,$f\neq 0$,a 为 f 与 $f^{(k)}$ 的 IM 分担值,则 F 在 Δ 上正规.

笔者将使用值分布理论中的常用记号[5].

2 引理

引理 1[6] 设 F 为单位圆盘 Δ 上的一个亚纯函数族,k 为一正整数,F 中每个函数的零点重级均不小于 k. 假设存在 $A\geq 1$ 使得对任意的 $f\in F$,当 $f(z)=0$ 时有 $|f^{(k)}|\leq A$. 若 F 不正规,则对每一个 $0\leq \alpha\leq k$ 存在

(a) 正数 r,$0<r<1$;

(b) 点列 z_n,$|z_n|<r$;

(c) 函数列 f_n,$f_n\in F$;

(d) 正数列 ρ_n,$\rho_n\to 0$.

使得 $\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)=g_n(\xi)\to g(\xi)$ 按球面度量内闭一致收敛. 其中 g 为复平面 C 上的非常数亚纯函数,g 的级不超过 2.

引理 2[7] 设 f 为复平面 C 上的一个亚纯函数,a 为非零复数,k 为一正整数. 若 $f(z)\neq 0$,$f^{(k)}(z)\neq a$,则 $f(z)$ 为一常数.

3 定理的证明

假设 F 在 Δ 上不正规,则由引理 1,存在

(a) 正数 r,$0<r<1$;

(b) 点列 z_n,$|z_n|<r$;

(c) 函数列 f_n,$f_n\in F$;

(d) 正数列 ρ_n,$\rho_n\to 0$.

使得 $g_n(\xi)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^{\,k}}\to g(\xi)$ 按球面度量内闭一致收敛,其中 g 为复平面 C 上一非常数亚纯函数,g 的级不超过 2.

---

* 收稿日期:2006 - 01 - 20
作者简介:作者介绍:关大伟(1981 -),男,河南驻马店人,重庆大学硕士研究生,主要从事单复变函数方向的研究.

可以证明 $g(\xi)$ 满足下面两个性质:

1) $g(\xi)\neq 0$;

2) $g^{(k)}(\xi)\neq a$.

事实上,由于 $f_n(z)\neq 0$,从而 $g_n(\xi)\neq 0$,则 $g(\xi)\neq 0$. 否则 $\exists\xi'$ 若使得 $g(\xi')=0$. 由非常数解析函数零点的孤立性,$\exists\xi'$ 的一个邻域 $U(\xi',\delta)$,使得 $g(\xi)$ 在 $U(\xi',\delta)$ 上只有一个零点 ξ'. 由 Hurwitz 定理,$\exists$ 正整数 N,当 $n>N$ 时,$g_n(\xi)$ 在 $U(\xi',\delta)$ 有一个零点. 这与 $g_n(\xi)\neq 0$ 矛盾,所以 $g(\xi)\neq 0$.

假设存在一点 ξ_0,使得 $g^{(k)}(\xi_0)=a$,可以得出 $g^{(k)}(\xi)\not\equiv a$. 事实上,若 $g^{(k)}(\xi)\equiv a$,那么 $g(\xi)$ 为多项式,这与 $g(\xi)\neq 0$ 矛盾. 既然 $g^{(k)}(\xi_0)=a$, $g^{(k)}(\xi)\not\equiv a$,则由 Rouche 定理,存在 $g_n(\xi)$ 的一子列,不妨仍设为 $g_n(\xi)$,以及点列 $\{\xi_n\}$, $\xi_n\to\xi_0$,使得当 n 充分大时有

$$g_n^{(k)}(\xi_n)=a\ ,$$

即有

$$f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n)=a\ ,$$

注意到 f_n 与 $f_n^{(k)}$ IM 分担 a,

我们得到

$$g(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}g_n(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^{\ k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\rho_n^{\ k}}=\infty$$

这与 $g^{(k)}(\xi_0)=a$ 矛盾,所以有 $g^{(k)}(\xi)\neq a$.

再由引理2,可得到 $g(\xi)$ 为一常量. 这与 $g(\xi)$ 为复平面 C 上一非常数亚纯函数矛盾. 定理证毕.

参考文献:

[1] 顾永兴,亚纯函数的正规族[M]. 成都:四川教育出版社,1991.

[2] 仪洪勋,杨重骏,亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.

[3] SCHWICK W. Sharing Values and Normality[J]. Arch Math, 1992,59:50-54.

[4] PANG XUECHENG, LAWRENCE ZALCMAN. Normality and Shared Values [J]Arkiv for Mathematics, 2000, 38 :171-182

[5] 杨乐. 值分布论及其新研究[J]. 北京:科学出版社,1982.

[6] PANG XUECHENG, LAWRENCE ZALCMAN . Normal Families and Shared Values [J]. Bull London Math Soc,2000,32: 325-331

[7] HAYMAN W. Meromorphic Functions[M]. Clarendon : Oxford,1964.

Sharing Values and Normality Criteria

GUAN Da-wei , *LUO Qian-peng*

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Let F be a family of meromorphic functions on the unit disc Δ, let a be a non-zero complex number and k be a positive integer. If for every $f\in F$, $f\neq 0$, f and $f^{(k)}$ and share a, then F is normal on unit disk Δ.

Key words: meromorphic function; shared values; normal criteria

(编辑 张小强)