

文章编号:1000-582X(2006)06-0124-03

空间曲杆小变形问题自然标架的矩阵分析解*

郑安节¹, 张晓敏², 严波²

(1. 重庆科技学院, 重庆 400042; 2. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400030)

摘要:用杆轴线的自然标架描写空间曲杆小变形静力学问题, 不沿袭通常的方法, 即不用杆元变形几何分析方法推导几何方程, 采用虚功方程导出几何方程, 因此不受平截面假设的限制. 作为结果, 论文用矩阵形式给出含6个积分常数的内力和广义位移通解的解析表达式.

关键词:空间曲杆; 自然标架; 通解

中图分类号: TB12

文献标识码: A

空间曲杆的小变形问题是一个由来久远的理论和工程问题^[1-2]. 对于这个问题, 已经发展形成了一套较为完好的理论, 也发展了相应的有限元算法^[3-5]. 尽管如此, 时至今日, 空间曲杆小变形问题的几何方程的导出结果仍是大同小异的状态^[5-7], 相应的通解难于得到完好的解析式. 针对这两个问题, 采用虚功方程为出发点, 导出了几何方程; 用矩阵形式给出了全部问题的通解的显式.

1 挠曲线的自然标架

设空间曲线是一空间曲杆的轴线, 弧长坐标 s 自端点 O 起算, 其区间为 $(0, l)$. 弧坐标为 s 处, 切线、法线和次法线单位矢量分别记为 e_s, e_n 和 e_b . 它们组成曲线的自然标架, 如图 1 中所示. 对于足够光滑的曲线, 下列公式成立

$$\dot{e}_s = ke_n, \dot{e}_n = -ke_s - \tau e_b, \dot{e}_b = \tau e_n.$$

式中 k 和 τ 分别为曲率和扭率. 这个公式可以改写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}_n \\ \dot{e}_b \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} e_s \\ e_n \\ e_b \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中右上角'表示对 s 的求导, 而 $[K]$ 为挠曲矩阵

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

引入直角坐标系的基本单位矢量(图 1), i_x, i_y 和

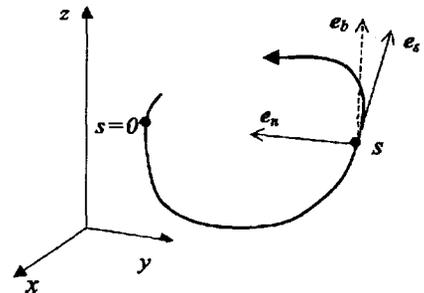


图 1 自然坐标

i_z , 组成 3 阶矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} e_s \cdot i_x & e_s \cdot i_y & e_s \cdot i_z \\ e_n \cdot i_x & e_n \cdot i_y & e_n \cdot i_z \\ e_b \cdot i_x & e_b \cdot i_y & e_b \cdot i_z \end{bmatrix}, \quad (3)$$

由于标架 e_s, e_n, e_b 和标架 i_x, i_y, i_z 分别是两两正交, 因此这个 3 阶矩阵是正交矩阵. 显然有标架变换式

$$\begin{bmatrix} e_s \\ e_n \\ e_b \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix}, \quad (4)$$

将此式代入式(1),

$$[A]' \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix} = [K][A] \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix}, \quad (5)$$

比较两端, 得到

$$[A]' = [K][A], \quad (6)$$

由此可见, 正交矩阵 $[A]$ 满足微分方程(6).

* 收稿日期: 2006-01-05

基金项目: 重庆交通学院结构实验室开放基金(编号 20040004); 中国博士后科学基金资助项目(2004036145)

作者简介: 郑安节(1963-), 男, 四川盐源人, 工学硕士, 重庆科技学院讲师, 从事力学教学和科研工作.

2 内力和静力平衡方程

小变形状态下,弧坐标为 s 处,截面的内力在标架 e_s, e_n, e_b 上的分量分别记为 N_s, N_n, N_b , 分别称为轴力、 n 向切力和 b 向切力. 截面的内力关于轴心点 O' 的矩3个分量分别记为 M_s, M_n, M_b , 分别称为扭矩、 $sO'b$ 面和 $sO'n$ 面内的弯矩. 作用于轴线上的等效外力和等效外力矩在标架 e_s, e_n, e_b 上的分量分别记为 q_s, q_n, q_b 和 m_s, m_n, m_b , 容易导出杆元的平衡方程, 参见图2.

$$\frac{d}{ds}(N_s e_s + N_n e_n + N_b e_b) + q_s e_s + q_n e_n + q_b e_b = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d}{ds}(M_s e_s + M_n e_n + M_b e_b) + e_s x(N_s e_s + N_n e_n + N_b e_b) + m_s e_s + m_n e_n + m_b e_b = 0. \quad (8)$$

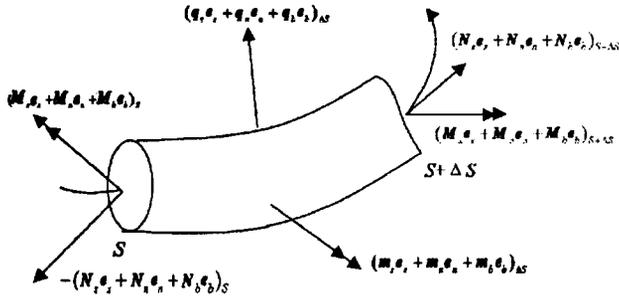


图2 曲杆元受力图

将(7)展开,利用式(1),得到如下矩阵形式

$$\{N\}' - [K]\{N\} + \{q\} = \{0\}, \quad (9)$$

式中

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_n \\ N_b \end{Bmatrix}, \{q\} = \begin{Bmatrix} q_s \\ q_n \\ q_b \end{Bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

可以证明方程(9)存在如下形式的通解

$$\{N\} = [A]\{f_1\} - [A] \int_0^s [A]^T \{q\} ds, \quad (11)$$

式中 $\{f_1\}$ 为积分常数向量

$$\{f_1\} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

它表示弧坐标为 $s=0$ 处截面的内力在标架 i_x, i_y, i_z 上的3个分量.

同理可将式(8)写成如下矩阵形式

$$\{M\}' - [K]\{M\} + [L]\{N\} + \{m\} = \{0\}, \quad (13)$$

式中

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{M\} = \begin{Bmatrix} m_s \\ m_n \\ m_b \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

方程(14)的通解为

$$\{M\} = [A]\{g_1\} - [A] \int_0^s [A]^T [L]\{N\} ds -$$

$$[A] \int_0^s [A]^T \{m\} ds, \quad (15)$$

这里 $\{g_1\}$ 为积分常数向量

$$\{g_1\} = \begin{Bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

它表示弧坐标为 $s=0$ 处截面的内力关于中心的矩在标架 i_x, i_y, i_z 上的3个分量.

3 虚功方程和几何方程

设 $\varepsilon, \gamma_n, \gamma_b$ 和 k_s, k_n, k_b 分别是与内力 N_s, N_n, N_b 和 M_s, M_n, M_b 功共轭的广义应变; u_s, u_n, u_b 和 $\varphi_s, \varphi_n, \varphi_b$ 分别是与载荷 q_s, q_n, q_b 和 m_s, m_n, m_b 功共轭的广义位移, 那末虚功方程可以写为

$$\int_0^l (N_s \delta \varepsilon_s + N_n \delta \gamma_n + N_b \delta \gamma_b + M_s \delta k_s + M_n \delta k_n + M_b \delta k_b) ds = \int_0^l (q_s \delta u_s + q_n \delta u_n + q_b \delta u_b + m_s \delta \varphi_s + m_n \delta \varphi_n + m_b \delta \varphi_b) ds + [N_s u_s]_0^l + [N_n u_n]_0^l + [N_b u_b]_0^l + [M_s \varphi_s]_0^l + [M_n \varphi_n]_0^l + [M_b \varphi_b]_0^l, \quad (17)$$

这里

$$[N_s u_s]_0^l = (N_s u_s)_{s=l} - (N_s u_s)_{s=0}, \quad (18)$$

余类推之. 由于引入了剪应变 γ_n 和 γ_b , 这个方程已不再受平截面假设的限制.

为了导出几何方程, 用广义位移的变分构成如下乘子

$$\left. \begin{aligned} \delta \lambda &= \delta u_s e_s + \delta u_n e_n + \delta u_b e_b, \\ \delta \beta &= \delta \varphi_s e_s + \delta \varphi_n e_n + \delta \varphi_b e_b. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将之分别与平衡方程(7)和(8)两端点积, 两端分别相加, 对 s 完成区间 $(0, l)$ 上的积分, 利用分部积分方法, 可以将得式改写成式(17)的形式,

$$\int_0^l [N_s \delta(\dot{u}_s - k u_n) + N_n \delta(\dot{u}_n + k u_s + \tau u_b - \varphi_b) + N_b \delta(\dot{u}_b - \tau u_n + \varphi_n)] ds + \int_0^l [M_s \delta(\dot{\varphi}_s - k \varphi_n) + M_n \delta(\dot{\varphi}_n + k \varphi_s + \tau \varphi_b) + M_b \delta(\dot{\varphi}_b - \tau \varphi_n)] ds = \int_0^l (q_s \delta u_s + q_n \delta u_n + q_b \delta u_b + m_s \delta \varphi_s + m_n \delta \varphi_n + m_b \delta \varphi_b) ds + [N_s u_s]_0^l + [N_n u_n]_0^l + [N_b u_b]_0^l + [M_s \varphi_s]_0^l + [M_n \varphi_n]_0^l + [M_b \varphi_b]_0^l \quad (20)$$

比较式(17)和(20)相应的部分, 可以得到联系广义位移和广义应变的如下几何方程:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \dot{u}_s - k u_n, \gamma_n = \dot{u}_n + k u_s + \tau u_b - \varphi_b, \gamma_b = \dot{u}_b - \tau u_n + \varphi_n, \\ k_s &= \dot{\varphi}_s - k \varphi_n, k_n = \dot{\varphi}_n + k \varphi_s + \tau \varphi_b, k_b = \dot{\varphi}_b - \tau \varphi_n. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

总结起来, 得到了如下几何方程

$$\{\varepsilon\} = \{\dot{u}\}^* - [K]\{u\} + [L]\{\varphi\}, \quad (22)$$

$$\{k\} = \{\dot{\varphi}\}^* - [K]\{\varphi\}, \quad (23)$$

式中

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma_n \\ \gamma_b \end{Bmatrix}, \{k\} = \begin{Bmatrix} k_s \\ k_n \\ k_b \end{Bmatrix}, \{u\} = \begin{Bmatrix} u_s \\ u_n \\ u_b \end{Bmatrix}, \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_s \\ \varphi_n \\ \varphi_b \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

将方程(22)、(23)与方程(9)、(13)比较,可以看到,两组方程有相同的数学结构.

4 本构模型与广义位移的同解

对于无初应力的空间曲杆,如果取等效本构方程为如下齐次形式

$$\{N\} = [C]\{\epsilon\}, \{M\} = [D]\{k\}, \quad (23)$$

或写为

$$\{\epsilon\} = [C]^{-1}\{N\}, \{k\} = [D]^{-1}\{M\}, \quad (24)$$

这里三阶矩阵[C]和[D]是与杆的材料及其结构有关的刚度矩阵;[C]⁻¹和[D]⁻¹为它们的逆.

根据方程(21)、(20)与方程(9)、(13)数学结构的相同性,利用等效本构方程(24),广义位移的通解可以用矩阵形式表示

$$\{\varphi\} = [A]\{f_2\} + [A] \int_0^s [A]^T [D]^{-1} \{M\} ds, \quad (25)$$

$$\{u\} = [A]\{g_2\} - [A] \int_0^s [A]^T [L]\{\varphi\} ds + [A] \int_0^s [A]^T [C]^{-1} \{N\} ds, \quad (26)$$

式中{f₂}和{g₂}为积分常数向量

$$\{f_2\} = \begin{Bmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{Bmatrix}, \{g_2\} = \begin{Bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

它们分别表示弧坐标为处截面的转角和轴线上点的位移在标架*i_s*、*i_n*、*i_t*上的3个分量.这样一来,得到用12个积分常数表示的空间曲杆的小变形问题通解.

参考文献:

- [1] LOVE A E H, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity[M]. New York: Dover, 1944. 18 - 21.
- [2] Timoshenko S. Theory of elastic stability. New York: McGraw-Hill Book, CoInc., 1932.
- [3] 熊汉伟,张培源. 空间曲杆有限元分析[J]. 重庆大学学报(自然科学版),1997,24(4):31 - 36.
- [4] 熊汉伟. 空间小挠曲杆理论及有限元法[D]. 重庆:重庆大学,1996.
- [5] 谈梅兰,王鑫伟. 一种有效的分析任意空间形状曲杆单元的位移函数[J]. 工程力学,2004,21(3):14 - 137.
- [6] MORRIS D C. Curved beam stiffness coefficient[J]. ASCE J Structure Div,1968,94(4):1 105 - 1 174.
- [7] 陈大鹏,周文伟. 空间弹性曲杆在三维变形中的曲率 - 位移关系[J]. 西南交通大学学报,1997,32(2):123 - 129.

Small Deformation Analytical Solution of Spatial Curved-rods in Natural Coordinate System

ZHENG An-jie¹, ZHANG Xiao-mir², YAN Bo²

(1. Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 400042, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Natural coordinate system along the axis of a curved - rod is used to describe the static problems in small deformation, and virtual work equation is in turn utilized to derive the geometric equations of the problems. The general solution of internal forces and general displacements in the matrix form with 6 integral constants are given out, without the assumption of plane cross - section.

Key words: spatial curved-rod; natural coordinate; general solution

(编辑 张小强)