第30卷第10期 重庆大学学报(自然科学版) Vol.30 No.10
2007年10月 Journal of Chongqing University(Natural Science Edition) Oct. 2007

文章编号:1000-582X(2007)10-0042-04

具有线性不等式约束非线性规划问题的降维算法

杨　懿[1,2],张守贵[3]

(1.重庆大学 计算机学院,重庆 400030;2.重庆科技学院 数理系,重庆 400042;3.重庆师范大学 数计学院,重庆 400047)

摘　要:对线性约束的一般非线性规划问题进行了研究,在算法中提到的起作用集策略,与常见的起作用集算法相比较,在迭代过程中求解等式约束子问题时采用了降维算法,而对于不等式约束子问题采用了起作用集算法。通过数值试验,说明了算法的有效性。算法对于求解非线性约束非线性规划问题提出了一种新思路,将非线性约束线性化,解决一般此类问题。

关键词:非线性规划;线性不等式约束;降维算法

中图分类号:O221.2　　文献标志码:A

1　一般等式约束非线性规划

考虑问题:

(ECP) $\operatorname{Min} f(x)$

$$s.t\quad g(x)=0$$

其中 $f:R^n->R$; $g:R^n->R^m$　$m<n$。

记 $g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x))$,$p=n-m$ 令

$$\boldsymbol{P}(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_p}\right)^T,$$

$$\boldsymbol{Q}(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{p+1}},\frac{\partial f(x)}{\partial x_{p+2}},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$$

$$\nabla\boldsymbol{g}(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1},\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n}\\ \square & \ddots & \square\\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1},\frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2}, & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1},\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_p}\\ \square & \ddots & \square\\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1},\frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_p}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{p+1}},\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{p+2}} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n}\\ \square & \ddots & \square\\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{p+1}},\frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{p+2}} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}。$$

引理1[1]　设 $x^0\in R^n$ 是(ECP)的最优解,f 和 g 连续可微,若矩阵 $M(x^0)$ 是非奇异的,则有

$$\boldsymbol{P}(x^0)=(M(x^0)^{-1}N(x^0))^TQ(x^0)。$$

引理2[1]　如果方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}(x)=(\boldsymbol{M}(x)^{-1}\boldsymbol{N}(x))^T\boldsymbol{Q}(x),\\ \boldsymbol{g}(x)=0,\end{cases}\tag{1}$$

的解 x^0 使 $M(x^0)$ 非奇异,则 x^0 是等式约束问题(ECP)的 $K-T$ 点,且对应的 $K-T$ 乘子

$$\lambda=-(\boldsymbol{M}(x^0)^{-1})^T\boldsymbol{Q}(x^0)\tag{2}$$

注:$\boldsymbol{M}(x)$,$\boldsymbol{N}(x)$,$\boldsymbol{P}(x)$,$\boldsymbol{Q}(x)$ 中变量 x 的分量下标不一定连续。

2　含不等式约束的二次规划

2.1　考虑问题:

$$\text{(EQP)}\ \min f(x)=\frac{1}{2}x^T\boldsymbol{G}x+g^Tx$$

收稿日期:2007-05-12

作者简介:杨懿(1978-),男,重庆大学博士,主要从事最优化理论及应用,差分方程应用图论研究,(Tel)13752905609;(E-mail)yangyi-2001@163.com。

$$s.t\quad \boldsymbol{A}x=b$$

其中：$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} g_{11},g_{12} & \cdots & g_{1n}\\ \square & \ddots & \square\\ g_{n1},g_{n2} & \cdots & g_{nn}\end{pmatrix}$

对称　$A=\begin{pmatrix} a_{11},a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \square & \ddots & \square\\ a_{m1},a_{m2} & \cdots & g_{mn}\end{pmatrix}$

$$g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)^{\mathrm T};$$

$$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm T};$$

令 $\boldsymbol{h}(x)=\boldsymbol{A}x-b$

则 $\nabla\ \boldsymbol{h}(x)=\boldsymbol{A}$，

$$\nabla f(x)=\boldsymbol{G}x+g \tag{3}$$

设 A 中有一个 m 阶非奇异子块（$r(\boldsymbol{A})=m$）

$$M=\begin{pmatrix} a_{1,i_1},a_{1,i_2} & \cdots & a_{1,i_m}\\ \square & \ddots & \square\\ a_{m,i_1},a_{m,i_2} & \cdots & a_{m,i_m}\end{pmatrix},$$

记　$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} a_{1,j_1},a_{1,j_2} & \cdots & a_{1,j_p}\\ \square & \ddots & \square\\ a_{m,j_1},a_{m,j_2} & \cdots & a_{m,j_p}\end{pmatrix}$

其中：$i_s, j_t\in\{1,2,\cdots,n\}$；$i_s\neq j_t$；$\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}\cup\{j_1,j_2,\cdots,j_p\}=\{1,2,\cdots,n\}$

由式(3)得

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}x_k g_{jk}+g_j\quad j=1,2,\cdots,n,$$

从而　$\boldsymbol{P}(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{j_1}},\frac{\partial f(x)}{\partial x_{j_2}},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_{j_p}}\right)^{\mathrm T}$

$$=\begin{pmatrix} g_{j_1,1},g_{j_1,2} & \cdots & g_{j_1,n}\\ \square & \ddots & \square\\ g_{j_p,1},g_{j_p,2} & \cdots & g_{j_p,n}\end{pmatrix}x+\begin{bmatrix} g_{j_1}\\ \square\\ g_{j_p}\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}_p x+g_p^*,$$

$$Q(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_1}},\frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_2}},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_m}}\right)^{\mathrm T}$$

$$=\begin{pmatrix} g_{i_1,1},g_{i_1,2} & \cdots & g_{i_1,n}\\ \square & \ddots & \square\\ g_{i_m,1},g_{i_m,2} & \cdots & g_{i_m,n}\end{pmatrix}x+\begin{bmatrix} g_{i_1}\\ \square\\ g_{i_m}\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}_m x+g_m^*。$$

令 $B=M^{-1}N$　则式(1)变成：

$$\begin{cases}(G_p-B^TG_m)x=B^Tg_m^*-g_p^*\\ Ax=b\end{cases}$$

对增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$作行的初等变换得出一个与 $Ax=b$ 等价的线性方程组 $A^*x=b^*$，要求 A^* 中有一个 r 阶单位矩阵 I_r其中 r = 秩 A^*（$r\leqslant m$），这时取 $M=I_r$，$p=n-r$

同前面一样式(1)变成

$$\left.\begin{aligned}&(G_p-N^TG_r)x=N^Tg_r^*-g_p^*\\ &A^*x=b^*\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

令 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{G}_p-\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{G}_r$　$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{N}^Tg_r^*-g_p^*$

则式(4)可写成

$$\boldsymbol{V}x=\boldsymbol{U} \tag{5}$$

其中　$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}A_1\\ A^*\end{bmatrix}$　$U=\begin{bmatrix}U_1\\ \boldsymbol{b}^*\end{bmatrix}$

若式(5)的解是 x^*，则由引理2，x^* 是(EQP)的 $K-T$ 点，且由式(2)有 $K-T$ 乘子

$$\lambda^*=-(G_rx^*+g_r^*) \tag{6}$$

算法1[4]　输入数据 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{A}$，向量 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{b}$.

Step1. 确定矩阵 $\boldsymbol{N},\boldsymbol{G}_P,\boldsymbol{G}_r,\boldsymbol{g}_r^*,\boldsymbol{g}_p^*\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{b}^*$

Step2. 构造线性方程组

$$\begin{cases}(\boldsymbol{G}_p-\boldsymbol{N}^TG_r)x=\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{g}_r^*-\boldsymbol{g}_p^*\\ \boldsymbol{A}^*x=\boldsymbol{b}^*\end{cases} \tag{7}$$

Step3. 求解线性方程组(7)，并输出解 x。

2.2　考虑问题

$$(\mathrm{NQP})\quad \min f(x)=\frac{1}{2}x^T\boldsymbol{G}x+\boldsymbol{g}^Tx$$

$$s.t\quad a_i^Tx=b_i,\quad i=1,2,\cdots,m_e$$

$$a_i^Tx\leqslant b_i,\quad i=m_{e+1},m_{e+2},\cdots,m$$

其中 G 是 n 阶对称矩阵，$g\in R^n$

定义指标集[5] $N=\{1,2,\cdots,m\}$；$E=\{1,2,\cdots,m_e\}$；$I(x^*)=\{i\mid a_i^Tx^*=b_i,i=m_{e+1},m_{e+2},\cdots,m\}$

算法2[2]　输入数据。矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{A}$，向量 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{b}$，集合 E.

Step1　给出初始可行点 x^0

令 $k:=0$，$\boldsymbol{J}=E\cup I(x^k)$　$I(x^k)=\{j\mid a_j^Tx^k-b_j=0,j\in N\backslash E\}$，

$K=\{j\mid a_j^Tx^k-b_j<0,j\in N\backslash E\}$，且满足 $J\neq\Phi$。

Step2　解等式约束二次规划问题：

$$(\mathrm{EQP})^k\quad \min f(x)=\frac{1}{2}x^TGx+g^Tx$$

$$s.t\quad a_i^Tx=b_i,\quad i\in J。$$

由算法1可解得$\bar{x}^{k+1}$。

Step3　判断，若 $a_i^T\bar{x}^{k+1}-b_i\leqslant 0,\forall i\in N\backslash \boldsymbol{J}$，则$\bar{x}^{k+1}$是(NQP)的可行点且是$(\mathrm{EQP})^k$ 的 $K-T$ 点，$x^{k+1}:=\bar{x}^{k+1}$，转Step4。

否则，令 $W=\{j\in K\mid a_j^T\bar{x}^{k+1}-b_j>0,j\in N\backslash J\}$，

选取 $t=\min\limits_{j\in W}\dfrac{-(a_jx^k-b_j)}{a_j(\bar{x}^{k+1}-x^k)}=\dfrac{-(a_j^Tx^k-b_j)}{a_j^T(\bar{x}^{k+1}-x^k)}$，$x^{k+1}=x^k+t(\bar{x}^{k+1}-x^k)$，

$I(x^{k+1}):=I(x^k)\cup\{j_k\}$，$K:=K\backslash\{j_k\}$，$J:=I(x^{k+1})\cup E$，$k=k+1$ 转Step2。

Step4 将 x^{k+1} 作为式(5)的解代入式(6)求出 λ^k,转 Step5

Step5 若 $\lambda_i^{+1} \geqslant 0$, $\forall i \in I(x^{k+1})$,停机,输出解 x^{k+1},否则转 Step6。

Step6 令 $\lambda_{ik} = \min\{\lambda_i \mid \lambda_i < 0, i \in I(x^{k+1})\}$,转 Step7

Step7 $I(x^{k+1}) := I(x^{k+1}) \setminus \{i_k\}$, $J := I(x^{k+1}) \cup E$, $K := N \setminus J$ $k := k+1$,转 Step2。

3 混合线性约束的非线性规划

考虑问题

(MLP) $\min f(x)$

$$s.t\quad a_i^T x = bi \quad i = 1,2,\cdots,m_e$$

$$a_i^T x \leqslant bi \quad i = m_{e+1}, m_{e+2}, \cdots, m$$

其中:$E = \{1,2,\cdots,m_e\}$;$N = \{m_{e+1}, m_{e+2}, \cdots, m\}$

起作用约束集 $I(x) = \{i \mid a_i x = b_i \quad i \in E \cup N\}$。

$X = \{x \in R^n \mid a_i^T x \leqslant b_i, i \in N, a_i x = b_i, i \in E\}$ 为问题(MLP)的可行域,目标函数 $f(x)$ 为一般非线性函数且 $f \in C^2$。

将 $f(x)$ 在 x^k 处二次逼近,由(MLP)立刻得出

$$(\mathrm{NQP})^k \quad \min g(d_k) = \nabla f(x^k)^T d_k + \frac{1}{2} d_k \nabla^2 f(x^k) d_k,$$

$$s.t\quad a_i d_k + a_i x^k - b_i = 0, i \in E,$$

$$a_i d_k + a_i x^k - b_i \leqslant 0, i \in N,$$

其中 $d_k = x - x^k$。

从而,对于问题(MLP),可以提出如下算法。

算法3 Step1 输入数据。函数 $f(x)$,$\boldsymbol{A}$(约束系数矩阵),$\boldsymbol{b}$(约束向量),E(等式约束指标集),pos(等式约束数目),m(不等式约束数目),NE(不等式约束指标集),迭代精度 ε。

Step2 给出问题(MLP)初始可行点 x^1,问题 $(\mathrm{NQP})^k$ 的初始可行向量 d_1($d_1 = x^* - x^1$, x^* 为(MLP)的另一可行点),差分步长 h,置 $k := 1$。

Step3 用差分法求目标函数 $f(x)$ 的梯度 $\nabla f(x^k)$

$$\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_i} = \frac{f(x^k + H) - f(x^k - H)}{2h}$$

其中:$H = (0,\cdots,\overset{i}{h},\cdots,0)$, $i = 1,2,\cdots,n$

令 $g_k = \nabla f(x^k)$,转 Step4。

Step4 用差分法[6]求目标函数 $f(x)$ 的 Hesse 矩阵 $\nabla^2 \boldsymbol{f}(x^k)$

$$\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_i x_j} = \frac{f_1 - f_2 - f_3 + f_4}{4h^2};\ i,j = 1,2,\cdots,n$$

$\boldsymbol{f}_1 = f(x^k + H)$, $\boldsymbol{f}_2 = f(\cdots, x_i^k - h, \cdots, x_j^k + h, \cdots)$, $\boldsymbol{f}_3 = f(\cdots, x_i^k + h, \cdots, x_j^k - h, \cdots)$, $\boldsymbol{f}_4 = f(x^k - H)$,

其中:$H = (0,\cdots,\overset{i}{h},\cdots 0)$, $i = 1,2,\cdots,n$。令 $G_k = \nabla^2 f(x^k)$,转 Step5。

Step5 利用算法2,解含不等式约束的二次规划问题

$$(\mathrm{NQP})^k \quad \min g(d_k) = \nabla f(x^k)^T \boldsymbol{d_k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{d_k} \nabla^2 f(x^k) \boldsymbol{d_k},$$

$$s.t\quad a_i \boldsymbol{d_k} + a_i x^k - b_i = 0, i \in E,$$

$$a_i \boldsymbol{d_k} + a_i x^k - b_i \leqslant 0, i = m_{e+1}, m_{e+2}, \cdots, m,$$

可解得向量 $\boldsymbol{d_k}$ 转 Step6。

Step6 判断 $\|\boldsymbol{d_k}\|$,若 $\|\boldsymbol{d_k}\| < \varepsilon$,输出解 $x^{k+1} := x^k + \boldsymbol{d_k}$,停机。

否则 $x^k := x^{k+1}$,转 Step3。

注:若知道函数的表达式可直接求它的梯度和 Hesse 矩阵代替 Step3,Step4。

4 算例

算例1:$\min f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + (x_3 - x_2^2)^2 + (1 - x_2)^2$

$$s.t.\quad 9x_1 + 6x_2 + x_3 - 100 = 0$$

$$-10x_1 - 20x_2 - x_3 + 100 \leqslant 0$$

$$-40 + x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 0$$

计算结果见表1。

表1 算法3求解算例1的迭代结果(迭代步长 $h = 0.01$)

迭代次数	x^k	$I(x^k)$	$f(x^k)$
0	[10.000 0 1.000 0 4.000 0]	{1}	9891.000 0
1	[6.742 0 5.873 6 4.080 3]	{1 3}	2548.692 4
2	[6.601 9 5.860 7 5.419 2]	{1 3}	2314.947 0
3	[6.600 9 5.862 2 5.418 7]	{1 3}	2314.946 3

其中 x^k,$I(x^k)$,$f(x^k)$ 分别表示迭代点,起作用约束集,目标函数值。

利用软件 Matlab6.1 求得的结果:

$x^* = [6.600\,930, 5.862\,158, 5.418\,689]$,最优值为 $fval = 2\,314.946$

算例2:$\min f(x) = \frac{1}{3}\sin 3(x_1 - x_2)^2 + \frac{2}{3}e^{-3x_2^2} - \frac{2}{3}\ln(1 + x_2)^6 - 2x_1$,

$$s.t.\quad x_1 + x_2 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 2$$

计算结果见表2。

表 2　算法 3 求解算例 2 的迭代结果（迭代步长 $h=0.01$）

迭代次数	x^k	$I(x^k)$	$f(x^k)$
0	[1.000 0　1.000 0]	{1}	−4.739 734 3
1	[0.978 5　1.021 5]	{1}	−4.740 258 6
2	[0.980 0　1.020 0]	{1}	−4.741 387 2
3	[0.980 0　1.020 0]	{1}	−4.741 387 2

利用软件 Matlab 6.1 求得的结果：

$x^*=[0.980\,0, 1.020\,0]$，最优值为 fval $=-4.741\,387\,2$

算例 3：$\min\ \sin(x_1+x_2+x_3)+e^{-(x_1+x_2)}-\ln(1+x_3)-2x_2$，

$$s.t\quad x_1+x_2+x_3\leqslant 1$$
$$-x_1-2x_2-3x_3\leqslant -2$$
$$-2x_1+3x_2-x_3\leqslant -0.5$$

计算结果见表 3。

利用软件 Matlab 6.1 求得的结果：

$x^*=[0.388\,889\quad 0.222\,222\quad 0.388\,889]$，最优值为 fval $=0.886\,747\,99$。

表 3　算法 3 求解算例 3 的迭代结果（迭代步长 $h=0.01$）

迭代次数	x^k	$I(x^k)$	$f(x^k)$
0	[0.200 0　0.100 0　0.600 0]	Φ	1.064 6
1	[0.182 3　0.152 1　0.591 7]	{2}	0.975 5
2	[0.401 5　0.197 0　0.401 5]	{1,2}	0.928 6
3	[0.386 3　0.221 6　0.392 1]	{1,3}	0.887 6
4	[0.388 9　0.222 2　0.388 9]	{1,2,3}	0.886 7

参考文献：

[1] 李泽民. 最优化的一种新途径[J]. 重庆建筑工程学院学报,1990, 12 (1)：49-55.

[2] 童东付,李泽民. 二次规划问题的降维算法[J]. 重庆建筑大学学报,1999,21 (5)：64-68.

[3] 王开荣. 具有混合约束二次函数的逼近方法[J]. 重庆大学学报 ;自然科学版,2004, 27 (1), 131-134.

[4] 杨懿,李泽民. 不等式约束二次规划的一新算法[J]. 应用数学与计算数学学报,2005 , 19 (2)：55-60.

[5] 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M],北京 科学出版社,1997.

[6] 袁松琴,李泽民. 线性等式约束多目标规划的一个降维算法(英文版)[J]. 运筹学学报,2005, 9(1)：70-74.

Descending Dimension Algorithm of Nolinear Programming Problem with Linear Inequality Constraints

YANG Yi[1,2], *ZHANG Shou-gui*[3]

(1. Department of Computer Science and Technology Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University Chongqing 400047, China)

Abstract: The general nonlinear programming with linear constraints was investigated. In the algorithm, the method of contributing set was used. Comparing with the general contributing set method, the descending dimension method was used to solve the sub-problem with equality constraints in iterative procedure and the problem with inequality constraints. The algorithm is effective by the numerical test. Finally, it was proved that the iteration points are descending, when the objective functions are convex.

Keywords: nonlinear programming problems; linear inequality constraints; descending dimension algorithm

（编辑　侯　湘）