第 30 卷第 11 期　　重庆大学学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 11
2007 年 11 月　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Nov. 2007

文章编号:1000-582X(2007)11-0103-05

分担两个公共值集的亚纯函数的惟一性问题

张瑜琦，李纯红

(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘　要:在 Nevannlinna 值分布理论和现代许多学者在亚纯函数惟一性方面所获得的结果的基础上,考虑在涉及权分担的情况下进一步讨论了两个集合的亚纯函数的惟一性问题。证明了:对于任意两个非常数的亚纯函数 f 和 g,只要按权 k 分担集合 S 和 IM 分担 $\{\infty\}$,就必有 $f\equiv g$。此结果推广了仪洪勋教授一个结果。

关键词:亚纯函数;权分担;公共值集;惟一性

中图分类号:O174.52　　　　**文献标志码**:A

1　引言和主要结果

采用值分布论的标准记号,参阅文献[1-2]。

设 f 和 g 是两个非常数亚纯函数,S 为一个具有不同元素的复数集合,a 为任意复数,k 为任意整数且 $k\geqslant 1$。$E_k(S,f)$ 表示 $f-a$ 的所有零点,当零点的重数 $m\leqslant k$ 时,计 m 次;当 $m>k$ 时,则仅计 $k+1$ 次。若 $E_k(S,f)=E_k(S,g)$,则称 f 和 g 按权 k 分担 S。记为:f 和 g 分担 (S,k)。特别地,当 $S=\{a\}$ 时,若 $E_k(a,f)=E_k(a,g)$,则称 f 和 g 按权 k 分担值 a。记为:f 和 g 分担 (a,k)。特别地,当 $k=\infty$ 时,f 和 g 按权 k 分担 S,即为 f 和 g CM 分担集合 S。

仪洪勋在文献[3]中,方明亮和徐万松在文献[4]中分别独立解决了 F. Gross 在 1976 年提出的问题[5],并将结果推广到亚纯函数。

令:$S=\{w\in C:aw^n-n(n-1)w^2+2n(n-2)bw-(n-1)(n-2)b^2=0\}$,其中 a,b 为两个非零复数且满足 $ab^{n-2}\neq 2$。

$$P(w)=aw^n-n(n-1)w^2+2n(n-2)bw-(n-1)(n-2)b^2,\tag{1}$$

$$R(w)=\frac{aw^n}{n(n-1)w^2-2n(n-2)bw+(n-1)(n-2)b^2}=\frac{aw^n}{n(n-1)(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)},\tag{2}$$

其中 α_1、α_2 是方程 $n(n-1)w^2-2n(n-2)bw+(n-1)(n-2)b^2=0$ 的两个判别根。

$$R'(w)=\frac{(n-2)aw^{n-1}(w-b)^2}{n(n-1)(w-\alpha_1)^2(w-\alpha_2)^2},\tag{3}$$

$$R(w)-1=\frac{P(w)}{n(n-1)(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)},\tag{4}$$

从式(3)和(4)知,多项式 $P(w)$ 仅有单零点[6]。

定理 1[6]　设 $S=\{w\in C\mid P(w)=0\}$,$P(w)$ 如式(1)中给出,其中 $n\geqslant 8$。若 f 和 g 满足:$E(S,f)=E(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$,则 $f\equiv g$。

定理 2[7]　集合 S 如定理 1 中所定义,其中 $n\geqslant 13$。若 f 和 g 满足:$\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=$

收稿日期:2007-07-15
作者简介:张瑜琦(1981-),女,重庆大学硕士研究生,主要从事复变函数的研究。顾永兴(联系人),男,教授,博士生导师,(Tel)023-65103468;(E-mail)ycgu@xqu.edu.cn。

$\overline{E}(\{\infty\},g)$,则$f\equiv g$。

文中推广了仪洪勋的结果(定理1),证明了如下结果:

定理3 集合S如定理1中所定义,若f和g分担(S,k)和$\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$,则当下列条件之一成立时,必有$f\equiv g$。

1) $k\geqslant 2,n\geqslant 9$; 2) $k\geqslant 5,n\geqslant 8$。

从定理的结论2)可以看出,当$k=\infty$时,即为仪洪勋在文献[6]中的结果。

2 一些记号和引理

为了证明定理3,需要以下的一些记号和引理:

f和g如定理3中所定义,令$F=R(f)$,$G=R(g)$。则

$$\left.\begin{aligned}F&=\frac{af^n}{n(n-1)(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)},\\ G&=\frac{ag^n}{n(n-1)(g-\alpha_1)(g-\alpha_2)},\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}F'&=\frac{(n-2)af^{n-1}(f-b)^2f'}{n(n-1)(f-\alpha_1)^2(f-\alpha_2)^2},\\ G'&=\frac{(n-2)ag^{n-1}(g-b)^2g'}{n(n-1)(g-\alpha_1)^2(g-\alpha_2)^2}。\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

设F为非常数亚纯函数,k为正整数且$k\geqslant 1$。$N_{k)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)$表示$F$的1值点中重数小于等于$k$的点的密值量。$N_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)$表示$F$的1值点中重数大于等于$k+1$的点的密值量。同样可定义$N_{k}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)$,$N_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)$,…。$F$的1值点中重数大于或等于$k+1$的点,且在这些点处$F$的重级大于$G$的重级,就用$\overline{N}^{L}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)$表示这些点的计数函数。同样可定义$\overline{N}^{L}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)$。

引理1[1] 设f为非常数亚纯函数,n为正整数,则有$N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+n\overline{N}(r,f)+S(r,f)$。

引理2[1] 设f为非常数亚纯函数,$R(f)=\frac{P(f)}{Q(f)}$,其中$P(f)=\sum\limits_{i=0}^{p}a_if^i$,$Q(f)=\sum\limits_{j=0}^{q}b_jf^j$是两个互质的关于$f$的多项式。系数$\{a_i\}$、$\{b_j\}$分别为$f$的小函数,且$a_p(z)$、$b_q(z)$均不恒等于零。则$T(r,R(f))\leqslant\max\{p,q\}T(r,f)+S(r,f)$。

引理3[3] F与G为两个非常数亚纯函数,H定义如下:

$$H=\frac{F''}{F'}-2\frac{F'}{F-1}-\left(\frac{G''}{G'}-2\frac{G'}{G-1}\right)。\qquad(7)$$

若$H\equiv 0$,则$E(1,F)=E(1,G)$。

引理4 F与G为两个非常数亚纯函数,若F与G按权k分担1,k为正整数且$k\geqslant 2$,则有

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)。\qquad(8)$$

证明:

$$\begin{aligned}&\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=\frac{1}{2}\left[2\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\right]+\\&\frac{1}{2}\left[2\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-N_{1)}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\right]=\\&\frac{1}{2}\left[\overline{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+2\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\right]+\\&\frac{1}{2}\left[\overline{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+2\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\right]\leqslant\\&\frac{1}{2}\left[N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\right]+\\&\frac{1}{2}\left[N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\right],\end{aligned}$$

即得引理的证明。

引理5[7] 设f和g是两个非常数亚纯函数,F与G如式(5)中所定义。

$$\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=\frac{1}{k}T(r,f)+\frac{1}{k}\overline{N}(r,f)+S(r,f)。\qquad(9)$$

引理6 f和g如定理3中所定义,F和G如式(5)所定义。

令:
$$U=\frac{F'}{F-1}-\frac{F'}{F}-\left(\frac{G'}{G-1}-\frac{G'}{G}\right)。\qquad(10)$$

若 U 不恒等于零，则

$$\left(n-3-\frac{2}{k}\right)\overline{N}(r,f)\leqslant\left(\frac{1}{k}+1\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g)。\tag{11}$$

证明　由式(10)知，F 和 G 的极点均不是 U 的极点。f 和 g 分担(S,k)时，由式(5)知 F，G 按权 k 分担 1。故 U 的极点只可能产生于 F 与 G 的零点，及 F 与 G 的 1 值点中重数不相同的点，且 U 的极点均为单极点。再结合式(4)和(5)及引理 4 有

$$N(r,U)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+\overline{N}^{L}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}^{L}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)=$$
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}^{L}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}^{L}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant\left(\frac{1}{k}+1\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+\frac{2}{k}\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)。$$

由式(10)，有 $m(r,U)=S(r,F)+S(r,G)=S(r,f)+S(r,g)$，

故　$$T(r,U)\leqslant\left(\frac{1}{k}+1\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+\frac{2}{k}\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)。$$

设 z_0 为 f 的 k_1 重极点，是 g 的 k_2 重极点。由式(5)知，z_0 是 F 的$(n-2)k_1$ 重极点，是 G 的$(n-2)k_2$ 重极点，再由式(10)知，z_0 是 U 的至少$(n-3)$重零点，故有

$$(n-3)\overline{N}(r,f)\leqslant N\left(r,\frac{1}{U}\right)\leqslant T(r,U)+O(1)\leqslant\left(\frac{1}{k}+1\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+\frac{2}{k}\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)，$$

即　$$\left(n-3-\frac{2}{k}\right)\overline{N}(r,f)\leqslant\left(\frac{1}{k}+1\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g)。$$

引理 7[3]　f,g,F,G,U 如引理 6 中所定义，若 $U\equiv0$，则 $F\equiv G$。

3　定理 3 的证明

由式(5)、(6)知，$f-\alpha_1$，$f-\alpha_2$ 的单零点是 F 的单极点，$f-\alpha_1$，$f-\alpha_2$ 的重零点是 f' 的零点。$g-\alpha_1$，$g-\alpha_2$ 的单零点是 G 的单极点，$g-\alpha_1$，$g-\alpha_2$ 的重零点是 g' 的零点。且若 z_0 是 F 的单极点，则 $h=\frac{F''}{F'}-2\frac{F'}{F-1}$ 在 z_0 处正则。

1）假设 H 不恒等于零（下面所涉及到的 H 均如式(7)所定义），由已知 f 和 g 分担(S,k)，故有 F 和 G 按权 k 分担 1。则 F 和 G 的单级 1 值点必为 H 的零点，于是有

$$N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=N_{1)}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{H}\right)\leqslant N(r,H)+S(r,F)+S(r,G)。\tag{12}$$

结合式(5)、(6)、(7)、(12)有

$$N(r,H)\leqslant\overline{N}^{L}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}^{L}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)，$$

其中 $N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$表示 f' 的零点中除去 $f(f-b)$ 与 $F-1$ 的零点的那些点的计数函数。同样定义 $N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)$。

根据第二基本定理，引理 4 并注意到 $\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=\sum_{j=1}^{n}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-w_j}\right)$，其中 $w_j(j=1,2,\cdots,n)$为 $P(f)=0$ 的 n 个判别根。则有

$$(n+1)T(r,f)+(n+1)T(r,g)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+\overline{N}(r,f)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)+$$
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right)+\overline{N}(r,g)-N_0\left(r\left(r,\frac{1}{g'}\right)\right)+S(r,g)\leqslant N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+$$
$$\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+\overline{N}(r,f)-$$
$$N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right)+\overline{N}(r,g)-N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,g)，\tag{13}$$

由式(1)、(4)、(5)有

$$\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)\leqslant\frac{1}{2}T(r,P(f))+O(1)\leqslant\frac{n}{2}T(r,f)+S(r,f),\qquad(14)$$

同理有 $\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant\frac{n}{2}T(r,g)+S(r,g)$。 (15)

将式(9)、(12)、(14)、(15)代入式(13)得

$$(n+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\frac{n}{2}T(r,f)+\frac{n}{2}T(r,g)+2T(r,f)+2T(r,g)+2\overline{N}(r,f)-\overline{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)-\overline{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g)\leqslant N(r,H)-\overline{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)-\overline{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\left(\frac{n}{2}+2\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+2\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g),$$

即

$$(n+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{1}{2}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\left(\frac{n}{2}+4\right)T(r,f)+\left(\frac{n}{2}+4\right)T(r,g)+3\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g),$$

即

$$\left(\frac{n}{2}-3\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k}T(r,f)+\frac{1}{k}\overline{N}(r,f)+S(r,f)\right\}+3\overline{N}(r,f)+S(r,f)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k}T(r,g)+\frac{1}{k}\overline{N}(r,g)+S(r,g)\right\}+S(r,g)=\frac{1}{2k}\{T(r,f)+T(r,g)\}+\left(\frac{1}{k}+3\right)\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g),$$

即

$$\left(\frac{n}{2}-3-\frac{1}{2k}\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant\left(\frac{1}{k}+3\right)\times\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)。\qquad(16)$$

设 U 由式(10)所定义,则分两种情况进行讨论:

a. $U\equiv0$ 时,由引理6知,$F\equiv G$,则 $H\equiv0$。这与假设 H 不恒等于零矛盾。

b. U 不恒等于零时,将引理6的结果式(11)代入式(16)得

$$\left(\frac{n}{2}-3-\frac{1}{2k}\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant\frac{\frac{1}{k}+3}{n-3-\frac{2}{k}}\times\left(\frac{1}{k}+1\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g),$$

即

$$\left[\frac{n}{2}-3-\frac{1}{2k}-\frac{\frac{1}{k}+3}{n-3-\frac{2}{k}}\left(\frac{1}{k}+1\right)\right]\times\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant S(r,f)+S(r,g)。\qquad(17)$$

当 $k\geqslant2$ 时,要使式(17)成立,有 $n<9$,与已知 $n\geqslant9$ 矛盾。故假设不成立,即 $H\equiv0$。

2) $H\equiv0$ 时,由引理3:$E(1,F)=E(1,G)$。满足定理1得条件,即得 $f\equiv g$。

由同样的方法,可证得满足条件 $k\geqslant5$,$n\geqslant8$,则必有 $f\equiv g$。

至此,笔者在Nevanlinna值分布的基础之上,对两个亚纯函数的极点和一些公共分担值处的性质进行讨论,获得了定理的证明。对F. Gross问题做了进一步讨论,推广了仪洪勋的一个结果。

致谢

衷心感谢顾永兴教授和李江涛教授的指导与鼓励。

参考文献:

[1] 仪洪勋,杨重俊. 亚纯函数惟一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.
[2] 杨乐. 值发布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982.
[3] 仪洪勋. 亚纯函数的惟一性和Gross的一个问题[J]. 中国科学,1994,24(5):457-466.
[4] 方明亮,徐万松. 关于Gross问题的一个注记[J]. 数学年刊(A),1997,18(5):563-568.
[5] GROSS F. Factorization of meromorphic funtions and some open problems[J]. Complex Analysis,1976,599:51-69.
[6] 仪洪勋. 具有两个公共值集的亚纯函数[J]. 数学学报,2002,45(1):75-82.

[7] 李进东，章启兵. 具有两个 IM 公共值集的亚纯函数[J]. 数学研究与评论，2005，25(2): 299-306.

On the Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Two Sets

ZHANG Yu-qi, *LI Chun-hong*

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, P R China)

Abstract: The problem of uniqueness of meromorphic functions is discussed, such theory is proved: if there exists a set S provided that any two nonconstant meromorphic functions f and g shared the set S with weighted k and $\{\infty\}$ with weighted IM, the two functions must be identical, which improved the theorem of Yi H. X..

Key words: meromorphic function; weighted sharing; shared sets; uniqueness

（编辑　李胜春）

（上接第 98 页）

N Periodic Multiresolution Analysis with Band *M*

MAO Yi-bo

(Department of Mathematics, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing Yongchuan, 402168, P R China)

Abstract: N periodic multiresolution analysis with band M was introduced. By means of Fourier transformation and inner-product, N periodic orthogonal multiresolution analysis with band M was studied. Expression of its scaling function space in frequency domain is obtained, the coefficients relationship of lowpass filter and highpass filter is investigated, and the elementary property of its mask is worked out. The results show that filter and mask of periodic wavelet is a series of coefficients.

Key words: band M; *N* periodic; periodic multiresolution analysis.

（编辑　侯　湘）