文章编号:1000-582X(2007)11-0144-04

价格竞争下基于报童问题的需求模型分析

姚洪义,高云静
(江苏大学 理学院,江苏 镇江 212013)

摘 要:当前市场条件下,企业间的竞争通常只考虑库存竞争,而忽略了价格竞争。针对这一问题,在需求不确定且与价格具有相关性的前提下,建立了基于报童问题的需求模型。该模型面向包含多个企业的横向市场。同时,这些企业间采用联合定价/存货,并利用价格来竞争市场需求。分析了一个基于报童问题的定价博弈,通过增加不确定性延伸了需求模型。模型中各个企业通过自身的价格弹性影响自身的市场需求,同时也影响着其他企业的市场需求。

关键词:价格竞争;博弈;报童问题;需求模型
中图分类号:F232 文献标志码:A

顾客通常都是以质量和价格作为标准来选择相互竞争的公司,其中价格是选择中极其重要的一个因素。目前对于报童问题,很多文献已经提出了解决方法[1-4]。然而,除了文献[1]以外,这些研究都假设价格是由外因决定的,忽视了价格竞争。企业不直接对市场需求竞争,而是一个企业的库存影响了其它企业,这类博弈通常是库存或数量竞争。关键问题是表现博弈的纳什均衡的唯一性。与文献[1]类似的是,笔者试图在这些文献的基础上考虑价格竞争。

文献[5]已经很好地总结了文献[2-4]的研究,因此这里重点回顾文献[5]的工作。在它的模型中,企业出售可替代的商品。每个企业在出售季选择好最初存货量。这些文献的特点是存货的重分配是通过有独立思想和自身喜好的顾客来选择的。文献[5]认为:1)在存储平衡方面,系统的总体利润可以通过所有企业减少库存来增加;2)最恰当的联合是每个企业都希望增加他们自身的存储水平。但是这样可能会导致某些企业竞争性的存储过剩,而某些企业又可能会存货不足。针对这一现象,提出了一种需求模型体现了产品的可分,可代替的性质。任何企业的价格通过自身价格弹性影响着自身的市场需求,同时也影响其它企业的需求。在竞争博弈均衡中提高价格可以增加总体利润;而在任何合作博弈联合定价下,任何自利企业都会有降价的动机。笔者针对有可区分和可替代商品的多个公司,同时提出定价和存货的决策。这些商品的需求是随机的,并与价格相关的。也就是说,需要分析一个报童问题的定价博弈。这里多个企业出售的是本质上相同的产品。任何一个企业的需求量都是取决于自身的价格和其它企业的价格的。考虑到Bertrand定价博弈,在文献[6]的基础上提出了需求模型,这里需求功能在价格上是超模的。笔者通过加入不确定性来延伸这一需求模型。

1 模型的建立

这里考虑一个包含 n 个企业的市场,企业供应可区分又可替代的产品。厂商 i 的边际成本为设为 c_i,价格设为 p_i,需求 $RD_i(p,\xi_i)$ 是依赖于价格组合 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 和随机变量 ξ_i 的。厂商对价格/库存进行联合决策,通过价格作为策略变量在市场需求中竞争。

关于各个企业的需求、成本和决策规则的信息对于所有企业都是公有的。所有厂商同时选择价格,不可以串通,所以这是一个静态的非合作的博弈。每个厂商只有一次机会,因此这是一个典型的报童问题[2]。为了方便说明,忽略了与信誉相关的成本。

收稿日期:2007-06-29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(70401013,70571034);国家博士后基金资助项目资助项目(2003033498);江苏省教育厅基金资助项目(03KJD110070)
作者简介:姚洪义(1964-),男,江苏大学教授,主要从事系统科学及复杂性和博弈论的研究,(E-mail)hxyao@ujs.edu.cn。

令 $D_i(p)$ 为 RD_i 对任意给定价格组合的数学期望，即 $D_i(p) = E_{\varepsilon i}[RD_i(p,\xi_i)]$。在有关报童模型的定价中，文献大多数运用两种需求模型：加法形式 $RD_i(p,\xi_i) = D_i(p) + \xi_i$ 和乘法形式 $RD_i(p,\xi_i) = D_i(p)\cdot\xi_i$。这里，选择乘法形式的需求模型，并对模型中的随机变量 ξ_i 进行以下约束。

假设 1　随机变量 ξ_i 是独立于 p 的，且 $E[\xi_i] = 1$。

假设 2　对于任意企业 $i, i = 1,\cdots,n$，它的平均需求 $D_i(p)$ 满足以下性质[1]：

1）在每个 p_i 基础上定义 $S_i = [c_i,\bar{p}_i]$，这里，$\bar{p}_i$ 是 p_i 的最大准入值，$D_i(p)|_{p_i=\bar{p}i} = 0$；

2）$D_i(p)$ 是连续有界的，并且在策略空间 $S = S_1\times\cdots S_n$ 上对 p 可微；

3）$\dfrac{\partial D_i}{\partial p_i < 0}$；

4）$D_i(p)$ 价格弹性 $e_i = -(\partial D_i/\partial p_i)/(D_i/p_i)$ 是增加的，即 $\dfrac{\partial e_i}{\partial p_i > 0}$；

5）对于所有 $j\neq i$，$\dfrac{\partial D_i}{\partial p_j > 0}$；

6）对于所有 $j\neq i$，$\dfrac{\partial e_i}{\partial p_j \leqslant 0}$；

7）对任意 i，$\dfrac{\partial e_i}{\partial p_i + \sum_{j\neq i}\dfrac{\partial e_i}{\partial p_j}\geqslant 0}$。

其中，f_i 和 F_i 分别表示 ξ_i 的密度函数和累积概率函数，并且除了一般性成本，假设 $\xi_i\xi_j\, i,j = 1,\cdots,n, i\neq j$ 是互相独立的。$\bar{p}_i$ 的值可以是任意满足 $D_i(p) = 0$ 的有限值。

性质 3 和 4 表示 D_i 是随着厂商 i 的自身价格向下倾斜的，并且在 p_i 上有增加的价格弹性（IPE）。对于单一报童的定价问题，一些特殊函数（如线性函数，幂函数和凹函数等）都在相关文献中应用过了。这些函数只是在 IPE 情况下的特殊函数。

性质 5 要求当任何别的厂商增加了价格时，厂商 i 的需求量将明显提高，这就意味着不同厂商的产品是可替换的。

性质 6 进一步描述了替代商品之间的定价影响：厂商 j 的价格增长不仅增加了厂商 i 的需求量还降低了厂商 i 的价格弹性。这些性质意味着这种博弈是超模的。性质 6 等价于要求 $\dfrac{\partial^2(\ln(D_i))}{\partial p_i\partial p_j}\geqslant 0$，$i\neq j$。

性质 7 是一个控制条件，表示局部价格变化支配着交叉价格对局部价格弹性的影响，即描述了替代效应。

以下需求函数可以用于假设 2 中：

1）线性

$$D_i = \alpha_i - \beta_i p_i + \gamma_i\sum_{j\neq i}p_j, \alpha_i > 0, \beta_j > 0, \gamma_i > 0,$$

$i = 1,\cdots,n$。

2）分对数

$$D_i = \frac{a_i\exp(-bp_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_j\exp(-bp_j)}, a_i > 0, a_j > 0, b > 0, i,$$

$j = 1,\cdots,n$。

定义 p_{-i} 为 $(p_1,\cdots,p_{i-1},p_{i+1},\cdots,p_n)$，即 p_{-i} 是 p 排除了厂商 i 策略后的策略组合。给定一个策略组合 p_{-i}，厂商 i 的期望利润为

$$\prod_i(p_i,p_{-i},q_i) = E_{\xi_i}\{p_i[q_i\wedge RD_i(p,\xi_i)] - c_iq_i\}。$$

这里，q_i 是初始产品/订单量，且 $x\wedge y = \min(x,y)$。厂商 i 的目的是选择 (p_i^*,q_i^*) 使得利润 $\prod_i$ 最大化，即 $\prod_i(p_i^*,p_{-i},q_i^*) = \max\limits_{q_i,p_i}\prod_i(p_i,p_{-i},q_i)$。

2　模型分析

首先，需要研究厂商 i 对于其它厂商定价决定 p_{-i} 的反应。对于给定的 p_{-i}，厂商 i 面临一个典型的书童定价问题。$D_i(p)$ 采用乘法形式，厂商 i 的期望表示为：

$$\prod_i(p_i,p_{-i},q_i) = (p_i - c_i)q_i - p_iD_i(p)\int_0^{\frac{q_i}{D(p)}}F_i(t)\mathrm{d}t。\tag{1}$$

最优 q_i^* 通过 $q_i^* = D_i(p)F_i^{-1}(\rho_i)$ 给定，这里，$\rho_i = (p_i - c_i)/p_i$。将上式代到（1）式，重新整理得到

$$\prod_i(p_i,p_{-i}) = p_iD_i(p)\int_0^{F_i^{-1}(\rho_i)}tf(t)\mathrm{d}t。\tag{2}$$

将（2）转换为对数形式

$$\ln\prod_i(p_i,p_{-i}) = \ln\left(p_iD_i(p)\int_0^{F_i^{-1}(\rho_i)}tf(t)\mathrm{d}t\right)。\tag{3}$$

根据假设 2 的性质 6，得到

$$\frac{\partial^2\ln\prod_i(p_i,p_{-i})}{\partial p_i\partial p_j} = \frac{\partial^2(\ln(D_i))}{\partial p_i\partial p_j}\geqslant 0。$$

因此，这个博弈是超模的[6]。

从而得出以下结论：

引理 1　如果需求 $RD_i(p,\xi_i)$ 满足假设 1 和假设 2 的性质 1-4，那么对任意给定的 p_{-i}，式（2）中 $\prod_i(p_i,p_{-i})$ 对 p_i 为拟凹函数，并且有唯一的最大值 $p_i^*(p_{-i})$。

对于纯策略纳什均衡的唯一性，存在性的证明在文献[7]中已经给出。

法则 1　对于考虑中的博弈，存在着一个纳什均衡，它可以通过一阶条件 $\prod'(p) = 0$ 求得。

因为这个博弈是超模的,在寻找均衡时可以用有些简单的法则,在参考的一些文献中也有所说明。

3 竞争均衡和合作均衡的比较

定义 $\prod_{CS}(p)=\sum_{i=1}^{n}\prod_i(p_i,p_{i-1})$ 为 n 个企业的联合利润。设 $\tilde{p}$ 为价格向量,并使得 $\prod_{CS}$ 最大化,即: $\tilde{p}=\arg\max_p\prod_{CS}(p)$。

这样,如果企业间可以合作的话,$\tilde{p}$ 即为合作均衡的价格。得到以下结论:

法则2 在竞争纳什均衡点 p^*,

$$\frac{\partial\prod_{CS}(p^*)}{\partial p_i}>0;\forall i,\tag{4}$$

在合作均衡点 $\tilde{p}$,

$$\frac{\partial\prod(p^*)}{\partial p_i}<0,\forall i。\tag{5}$$

证明:对于任意 j, $\frac{\mathrm{d}\prod_j(p)}{\mathrm{d}p_i}=\left[\frac{\partial\prod_j(p)}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial p_j}{\partial p_i}+\sum_{k\neq j}\frac{\partial\prod_j(p)}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial p_i}\right]_{p=p^*}$。

当 $p=p^*$ 时,显然 $\frac{\partial\prod_j(p)}{\partial p_j}\Big|_{p=p^*}=0$。同时,因为博弈是超模的,每个参与者最好的反应就是增加别的参与者的定价策略,即 $\frac{\partial p_k}{\partial p_j}\Big|_{p=p^*}\geqslant 0$。

根据超模博弈性质[6], $\frac{\partial\left[\int_0^{F_j^{-1}(\rho_j)}t\cdot f(t)\mathrm{d}t\right]}{\partial p_k}\Big|_{p=p^*}\geqslant 0$。结合假设2的性质2,可以得到 $\frac{\partial\prod_j(p)}{\partial p_k}\Big|_{p=p^*}>0,(j\neq k)$。所以, $\frac{\partial\prod_j(p)}{\partial p_i}\Big|_{p=p^*}>0$。

在竞争纳什均衡点 p^*, $\frac{\partial\prod_{CS}(p)}{\partial p_i}=\frac{\partial\prod_i(p)}{\partial p_i}\Big|_{p=p^*}+\left[\sum_{k\neq j}\frac{\partial\prod_j(p)}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial p_i}\right]_{p=p^*}>0$。在合作均衡点 $\tilde{p}$, $\frac{\partial\prod_{CS}(\tilde{p})}{\partial p_i}=0,\forall i=1,\cdots,n$。

因此, $\frac{\partial\prod_i(\tilde{p})}{\partial p_i}=\frac{\partial\prod_i(\tilde{p}_i,\tilde{p}_{-i})}{\partial p_i}=-\sum_{j\neq i}^{n}\frac{\partial\prod_j(\tilde{p}_j,\tilde{p}_{-j})}{\partial p_i}<0$。

法则2得证。

公式(4)说明在竞争纳什均衡点,如果所有企业都增加他们的价格那么联合利润应该也是增加的。然而,没有企业愿意单方面提价。(5)式说明在合作均衡中,每个企业都有降价的动机来吸引更多的需求量。因此,如果各个公司是独立运作的话,合作均衡是不稳定的。参考文献[9]的定理1,得出以下结论:

推论 在这个报童式定价博弈中,$\tilde{p}>p^*$,换句话说,竞争带来了低均衡价以及更大的订单量。

4 数值算例

在这个部分我们用实例来获得均衡的相关观点。采用分对数需求模型 $D_i(p)=\frac{a_i\exp(-p_i)}{1+\sum_{j=1}^{n}a_j\exp(-p_j)}$, $a_i>0,a_j>0$。假设 ξ_i 平均分布在区间 $[1-\sigma_i,1+\sigma_i]$,在基础测试集中,选择一个均衡市场($a_i=1,c_i=1,\sigma_i=1,i=1,2,\cdots$)。

1)考虑市场中公司数量的影响。表1中计算出了竞争均衡值对合作均衡的百分比。如果在市场中有更多的竞争者,那么均衡价格和总体利润下降,而均衡库存增加。

表1 公司数量的影响

n	2	4	8	16
合作利润%	99.7	97.66	93.04	83.78
合作价格%	96.58	90.50	85.2	77.3
合作库存%	105.2	113.6	123.5	125.8

2)考虑两个公司间的不均匀市场。公司1的参数保持不变,公司2的参数则每次改变。目标参数包括边际成本 c_2 和不确定性测度 σ_2。以基本测试中对称的竞争均衡作为基准,并计算出不均匀的竞争均衡与基准的百分比。研究这些参数是如何影响每个公司在竞争中的地位的。

表2 边际成本的影响

C2中 Δ%	-50	-10	10	50	100
$\prod_1$	94.80	99.20	100.06	103.08	104.65
p_1	99.80	99.35	100.24	100.54	100.14
q_1	95.10	99.47	100.50	105.87	104.54
$\prod_2$	197.65	114.23	97.63	52.05	24.44
p_2	76.65	95.54	104.45	121.54	143.65
q_2	207.97	115.35	86.35	50.64	30.54

如表2所示,如果公司2的成本增加,那么其均衡

价也增加。而利润和库存则相反。公司 1 的价格，c_2 的改变几乎没有改变其利润以及库存数,而公司 2 的业绩却大大受其影响。

表 3　不确定性的影响

$\sigma 2$ 中 $\Delta\%$	0.9	0.8	0.5	0.2	0.1
$\prod_1$	99.65	99.23	98.86	97.54	96.35
p_1	99.99	99.95	99.50	99.65	99.89
q_1	99.63	99.25	98.85	97.54	97.63
$\prod_2$	106.54	113.12	135.98	157.68	167.98
p_2	97.63	95.68	90.57	86.54	85.68
q_2	102.00	103.65	109.63	115.54	117.52

表 3 中,改变了 ξ_2 的分布间隙,随着间隙缩短,公司 2 面临越小的危机,因为它的需求更加可以预测。这就使得公司 2 降低自己的价格来吸引更多的顾客,这样它的利润也会大大增加。公司 1 受到不利影响,尽管是细小的,这都是归结于公司 2 的大幅度降价影响。

5　结　论

在以往的库存博弈的基础上描述了一个用价格作为竞争策略的报童问题。提出一个公平的需求模型,它不依赖特殊的功能形式,而是运用价格弹性获得产品可区分,可代替的性质。本文的贡献在于在价格竞争模型中又增加了不确定性,延伸了需求模型,同时我们在计算均衡时没有对公司使用对称假设。然而,价格竞争中的需求模型往往忽略了商家之间超额存货的重新分配问题,这一问题在以后的研究中可以重点分析。

参考文献：

[1] BERNSTEIN F, FEDERGRUEN A. Decentralized supply chains with competing retailers under demand uncertainty [J]. Manage Science, 2005,51(1):18-29.

[2] 文平, 努尔尼沙. 报童问题及其在管理中的应用[J]. 昌吉学院学报,2003, 1(1):24-27.

[3] 苏欣,林正华,杨丽. 一次订购季节性销售的一种扩展报童模型[J]. 吉林大学学报(理学版), 2003(3):62-65.

[4] 宋海涛. 带有独立补偿销售的报童问题[J]. 内蒙古民族大学学报:自然科学版, 2004(4):72-78.

[5] MAHAJAN S, G. V. RYZIN. Inventory competition under dynamic consumer choice [J]. Operation Research., 2001, 49(5):646-657.

[6] TOPKIS D M. Equilibrium points in nonzero-sum n-person sub-modular games [J]. Control Optimization, 1979, 17(6):773-787.

[7] 索洪敏. 超级模数博弈的存在性[J]. 应用数学学报, 2006, 29(2):266-270.

[8] 杜建国. 本量力问题的博弈分析[J]. 江苏大学学报:自然科学版,2003 ,24(1):73-78.

[9] KOLSTAD C, MATHIESEN L. Necessary and sufficient condition for uniqueness of a Cournot equilibrium [J]. Studies, 1987, 54:681-90.

Study of Demand Model Based on Newsboy Problem under Price Competition

YAO Hong-xing, GAO Yun-jing

(Faluty of Sience, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P R China)

Abstract: According to the ignorance of price competition, facing stochastic price-dependent demand, a demand model based on the newsboy problem is proposed. This model considers a horizontal market of multiple firms. They make joint pricing/inventory decisions and use price to compete for market demand. Pricing games are analyzed based on newsboy problem. Demand model with substitutable property is established by introducing uncertainty. The firms' price influenced their own demand through self price elasticity and others' demand through cross-price elasticity in the model.

Key words: price competition; games; newsboy problem; demand model

(编辑　张小强)