

文章编号:1000-582X(2007)12-0080-04

双调和方程的无网格解法

李小林^a, 林 鑫^a, 祝家麟^a, 张永兴^b

(重庆大学 a. 数理学院; b. 土木工程学院, 重庆 400030)

摘 要:边界节点法(BNM)将边界积分方程和移动最小二乘近似方案相结合,同时具有边界元法降维和无网格法不需要划分网格的优势。BNM 中的形函数不具有 Delta 函数性质,在 BNM 中边界条件不容易施加。将 BNM 中的移动最小二乘近似方案用一致紧支径向基函数代替,得到一种新的边界型无网格法——一致径向边界节点法。这种方法的形函数矩阵具有稀疏性和 Delta 函数性质,边界条件可以像传统的边界元方法一样很容易施加。最后以双调和方程边值问题为例,导出了相应的离散方程,并通过数值分析验证了该无网格法的可行性和有效性。

关键词:双调和方程;边界节点法;径向基函数;一致紧支径向基函数;无网格法

中图分类号:O241.82

文献标志码:A

无网格法是近年来兴起的一种数值计算方法,它只需在计算区域上选取若干节点及其支撑基函数,不需要划分网格,应用广泛^[1]。无网格方法可分为边界型无网格法和区域型无网格法。将边界积分方程和移动最小二乘近似(moving least-square, MLS)^[1]方案相结合的边界节点法(boundary node method, BNM)^[2]是一种边界型无网格法。由于 MLS 方案不具有 Delta 函数性质,所以在 BNM 中边界条件不容易施加。为了使得插值函数具有 Delta 函数性质,文献[3]提出了径向边界节点法(radial boundary node method, RBNM),将 BNM 中的 MLS 形函数用全局径向基函数(radial basis functions, RBF)代替。但是全局 RBF 常常含有参数,并且插值结果严重依赖于这些参数的选取,而这些参数的最优值与所求解的具体问题有关;此外用全局 RBF 插值得到的形函数(有时也称插值函数)矩阵是满阵,增加了计算量。正定紧支径向基函数(compactly supported radial basis functions, CSRBF)不含参数,若用它代替 RBNM 中的全局 RBF,虽然不用选取参数,但是插值精度会降低。

一致紧支径向基函数(consistent compactly supported radial basis functions, CCRBF)^[1]是对 CSRBF 进行了完备性修正的插值函数,它不含参数,插值精度高,

并且能使形函数矩阵具有稀疏性。为了提高计算精度并避免 BNM、RBNM 中的缺点,笔者基于 CCRBF 和边界积分方程,提出了一致径向边界节点法。该方法是一种边界型无网格法,形函数具有 Delta 函数性质。将该方法应用于双调和问题的求解,导出其相应的离散方程,最后通过算例分析,验证了该方法的合理性与有效性。

1 双调和方程的边界积分方程

设 Ω 是 R^2 中具有光滑边界 Γ 的单连通区域,考虑如下双调和方程的边值问题

$$\Delta^2 u(\mathbf{X}) = 0, \mathbf{X} = (x, y) \text{ in } \Omega, \quad (1)$$

$$\text{I) } u(\mathbf{X}) = u_0(\mathbf{X}), q(\mathbf{X}) = q_0(\mathbf{X}) \text{ on } \Gamma; \quad (2)$$

$$\text{II) } u(\mathbf{X}) = u_0(\mathbf{X}), Mu(\mathbf{X}) = Mu_0(\mathbf{X}) \text{ on } \Gamma. \quad (3)$$

其中: $q(\mathbf{X}) = \frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}_x}$; $Mu(\mathbf{X}) = \Delta u(\mathbf{X})$; \mathbf{n} 是边界单位

外法向量;条件 I 为固定边界板的边界条件, II 为简支板的边界条件。

由 Green 公式和基本解可推得方程(1)的边界积分方程组为^[4]

$$\int_{\Gamma} (u(\mathbf{X}) - u(\mathbf{Y})) \frac{\partial G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x =$$

收稿日期:2007-07-10

基金项目:国家杰出青年科学基金资助项目(50625824)

作者简介:李小林(1983-),男,重庆大学博士研究生,主要从事边界元方法及其应用研究。祝家麟(联系人),男,教授,博士生导师,(E-mail)jlzhu@cqu.edu.cn。

$$\int_{\Gamma} \left(G_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) Tu(\mathbf{X}) - Mu(\mathbf{X}) \frac{\partial G_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial \mathbf{n}_X} + G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) q(\mathbf{X}) \right) dS_X, \quad (4)$$

$$\int_{\Gamma} (Mu(\mathbf{X}) - Mu(\mathbf{Y})) \frac{\partial G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial \mathbf{n}_X} dS_X = \int_{\Gamma} G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) Tu(\mathbf{X}) dS_X, \quad (5)$$

其中: $Tu(\mathbf{X}) = \frac{\partial \Delta u(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}_X}$; G_0, G_1 分别是 Laplace 算子和双调和算子的基本解;

$$G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|;$$

$$G_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{8\pi} |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|^2 (\ln |\mathbf{X} - \mathbf{Y}| - 1). \quad (6)$$

2 一致径向边界节点法的数值实施

2.1 一致紧支径向基函数(CCRBF)

在包含 N_X 个边界节点的支撑域 R_X 中对 CSRBF 进行完备性修正,使其满足零阶一致性,得到 CCRBF,

记为 $\tilde{B}_I (I=1, 2, \dots, N_X)^{[1]}$, 则

$$\tilde{B}_I(\mathbf{X}) = \frac{B_I(\mathbf{X})}{\sum_{J=1}^{N_X} B_J(\mathbf{X})}, \quad \sum_{I=1}^{N_X} \tilde{B}_I(\mathbf{X}) = 1, \quad (7)$$

其中 $B_I(\mathbf{X})$ 是 CSRBF, 笔者选择 Buhmann^[5] 提出的 CSRBF:

$$B_I(\mathbf{X}) = \frac{1}{15} + \frac{19}{6}r^2 - \frac{16}{3}r^3 + 3r^4 - \frac{16}{15}r^5 + \frac{1}{6}r^6 + 2r^2 \ln r, \quad (8)$$

式中 $r = \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_I\|}{d_I}$, d_I 是定义在节点 \mathbf{X}_I 处的 CSRBF 的支撑域半径。

2.2 一致紧支径向边界点插值

若支撑域 R_X 中包含 N_X 个边界节点,则 R_X 内的连续函数 $u(\mathbf{X})$ 可近似为

$$u(\mathbf{X}) \approx \tilde{u}(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^{N_X} a_I \tilde{B}_I(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}) \mathbf{a}, \quad (9)$$

其中: a_I 是待定系数;

$$\tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}) = [\tilde{B}_1(\mathbf{X}), \tilde{B}_2(\mathbf{X}), \dots, \tilde{B}_{N_X}(\mathbf{X})]; \quad (10)$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_{N_X}].$$

式(10)中的 \tilde{B}_I 是式(7)定义的 CCRBF。

令近似函数 $\tilde{u}^h(\mathbf{X})$ 在节点 \mathbf{X}_I 处的值等于函数 $u(\mathbf{X})$ 在该节点处的值,则

$$\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{B}}_0 \mathbf{a}, \quad (11)$$

其中:

$$\hat{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, \dots, u_{N_X}]^T; \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = [\tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}_1) \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}_2) \dots \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}_{N_X})]^T. \quad (13)$$

由式(11)解出系数列阵 \mathbf{a} , 代入式(9), 得

$$\tilde{u}^h(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}) \tilde{\mathbf{B}}_0^{-1} \hat{\mathbf{u}} = \Phi(\mathbf{X}) \hat{\mathbf{u}}, \quad (14)$$

式中形函数矩阵 Φ 为

$$\Phi(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}) \tilde{\mathbf{B}}_0^{-1} = [\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X}), \dots, \varphi_I(\mathbf{X}), \dots, \varphi_{N_X}(\mathbf{X})]. \quad (15)$$

当 CSRBF $B_I(\mathbf{X})$ 确定后,形函数 $\varphi_I(\mathbf{X})$ 只与节点的位置有关。

2.3 边界离散

方程(4)和(5)中的未知量是 u, Tu, q 和 Mu 。为便于积分,将边界 Γ 离散成 C 个背景网格,在每个背景网格上应用 Gauss 积分公式进行计算。为了简便,选取的背景网格互不重叠,且一个背景网格中只包含一个边界节点。每个 Gauss 点处的逼近式为

$$u(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) u_I, Tu(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) Tu_I,$$

$$q(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) q_I, Mu(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) Mu_I, \quad (16)$$

其中: N_X 是 Gauss 点 \mathbf{X} 支撑域中的节点数目; u_I, Tu_I, q_I 和 Mu_I 分别是边界节点值 $u(\mathbf{X}_I), Tu(\mathbf{X}_I), q(\mathbf{X}_I)$ 和 $Mu(\mathbf{X}_I)$ 。

以边界节点 $\mathbf{Y}_J (J=1, 2, \dots, N)$ 作为配置点,将式(16)代入式(4)和式(5), 得

$$\sum_{k=1}^C \int_{\Gamma_k} \left(\sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) u_I - u_J \right) \frac{\partial G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_J)}{\partial \mathbf{n}_X} dS_X = \sum_{k=1}^C \int_{\Gamma_k} \left(G_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_J) \sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) Tu_I - \frac{\partial G_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_J)}{\partial \mathbf{n}_X} \right) \cdot \sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) Mu_I + G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_J) \sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) q_I dS_X, \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^C \int_{\Gamma_k} \left(\sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) Mu_I - Mu_J \right) \frac{\partial G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_J)}{\partial \mathbf{n}_X} dS_X = \sum_{k=1}^C \int_{\Gamma_k} G_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_J) \sum_{I=1}^{N_X} \varphi_I(\mathbf{X}) Tu_I dS_X, \quad (18)$$

将方程(17)、(18)写成矩阵形式

$$\mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{u} + \mathbf{D} \mathbf{q} + \mathbf{E} \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{u} - \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (20)$$

矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}$ 中的积分总是非奇异的,可以用 Gauss 积分公式计算。对矩阵 \mathbf{D} 中的积分,当计算点 \mathbf{X} 和配置点 \mathbf{Y}_J 不在同一背景网格时,是非奇异的;当 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y}_J 在同一背景网格时,具有对数奇异性,此时可用文献[2]中的方法计算。

联立方程(19)(20),共有 $2N$ 个方程, $4N$ 个未知量。由于式(15)定义的形函数具有 Delta 函数性质,所以将式(2)或式(3)中的 $2N$ 个已知边界条件代入,可求出另外 $2N$ 个边界量。一旦解出未知的边界量,就可利用方程(17)和(18)求出域内任一点的 u 和 Mu 值。

3 算例

在以下算例中,CSRBF 的支撑域半径 $d_i = 2.5h$, h 为相邻节点之间最小距离。

例 1 设 $u = (2r^2 - r^4) \cos 2\theta$ 是单位圆内的双调和函数^[6],满足的边界条件是

- I) 固支边: $u = \cos 2\theta, q = 0$ on Γ ;
- II) 简支边: $u = \cos 2\theta, Mu = -12 \cos 2\theta$ on Γ 。

对这两类边界条件,分别选取全局径向基函数(GSRBF) $MQ: B_i(\mathbf{X}) = (r^2 + R)^q$ (参数 R 和 q 均按文献[3]中的实验值取为 0.5)和一致紧支径向基函数(CCRBF)计算 u 和 Δu 在直线 $y = 0$ 上的相对误差。当边界节点数目 $N = 32$ 时,数值结果见图 1 和图 2。

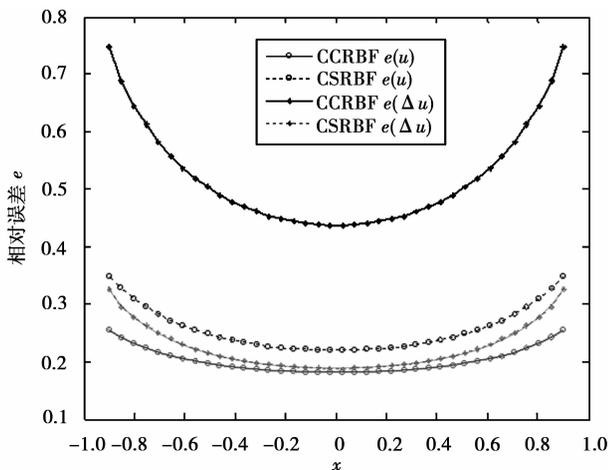


图 1 固支边界条件时 2 种 RBF 的结果比较

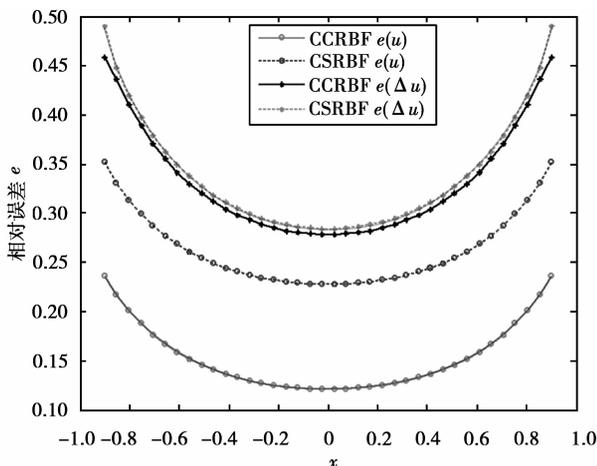


图 2 简支边界条件时 2 种 RBF 的结果比较

从 2 个图中可以看出,用 CCRBF 插值能达到用

GSRBF 插值时的精度,甚至更精确。从而表明,用 CCRBF 插值是可行的。

例 2 考虑如下定解问题^[7]

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]; \\ u = 0.5x(\sin x \cosh y - \cos x \sinh y) & \text{on } \Gamma; \\ \Delta u = \cos x \cosh y + \sin x \sinh y & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

该问题的解析解是

$$u = 0.5x(\sin x \cosh y - \cos x \sinh y)。$$

分别用 CCRBF 和 GSRBF 计算函数 u 在区域内部的数值解,结果见表 1。从表中可以看出,2 种 RBF 具有同样的精度。另外,边界节点越多,误差越小,精度越高。

表 1 位移 u 的计算结果

x, y	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	解析解
0.6, 0.6	0.051 3	0.045 2	0.043 7	0.043 3	0.043 2
	0.052 6	0.045 5	0.043 8	0.043 3	
0.6, -0.2	0.226 3	0.223 7	0.223 0	0.222 8	0.222 6
	0.226 7	0.223 8	0.223 0	0.222 7	
0.2, 0.6	-0.028 3	-0.036 0	-0.038 1	-0.038 6	-0.038 8
	-0.026 1	-0.035 5	-0.038 0	-0.038 6	
0.2, -0.6	0.095 3	0.088 5	0.086 7	0.086 2	0.085 9
	0.095 1	0.088 3	0.086 6	0.086 1	
-0.2, 0.2	0.046 7	0.041 9	0.040 6	0.040 2	0.040 0
	0.047 7	0.042 1	0.040 5	0.040 1	
-0.6, 0.6	0.364 6	0.360 4	0.359 1	0.358 7	0.358 4
	0.360 4	0.358 8	0.358 5	0.358 5	
-0.6, -0.2	0.126 1	0.123 8	0.123 2	0.123 0	0.122 9
	0.128 4	0.124 6	0.123 4	0.123 1	

说明:每组数据上一行表示用 CCRBF 计算的数值结果,下一行表示用 GSRBF 计算的结果。

4 结论

一致紧支径向基函数具有不含参数,插值精度高,并且能使形函数矩阵具有稀疏性等优势。笔者用一致紧支径向基函数代替边界节点法中的移动最小二乘近似方案来形成插值形函数,建立了一致紧支径向边界节点法,并将其应用于求解双调和方程边值问题。这种方法有如下特点:

- 1) 该方法是一种边界型无网格法,同时具有边界元法降维和无网格法不需要划分网格的优势;
- 2) 与边界节点法比较,该算法中的形函数满足 Delta 函数性质,因此本质边界条件可以像传统的边界元方法一样很容易施加;
- 3) 与径向边界节点法相比,该方法选用的一致紧支径向基函数不含参数,构造的形函数矩阵具有稀疏性,并且插值精度高。

另外,数值结果表明该方法具有很高的计算精度。

因此,这种无网格法是处理双调和方程边值问题的一种有效的解法。

参考文献:

- [1] 张雄,刘岩. 无网格法[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
- [2] MUKHERJEE Y X, MUKHERJEE S. The boundary node method for potential problems [J]. *Int J Num Meth Engng*, 1997, 40: 797-815.
- [3] XIE H, NOGAMI T, WANG J. A radial boundary node method for two-dimensional elastic analysis [J]. *Engng Anal Bound Elem*, 2003, 27: 853-862.
- [4] INGHAM D B, KELMANSON M A. Boundary integral analysis of singular, potential and biharmonic problems [M]. Berlin: Springer, 1984.
- [5] BUHMANN M D. Radial functions on compact support [J]. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1998, 41: 3-46.
- [6] ZHU JIALIN. Integral equation solutions for finite and infinite plate[M]// BREBBIA C A, MAIER G. *Boundary Elements VII*. Berlin: Springer-Verlage, 1985.
- [7] MAI-DUY N, TRAN-CONG T, TANNER R I. A domain-type boundary-integral-equation method for two-dimensional biharmonic Dirichlet problem [J]. *Engng Anal Bound Elem*, 2006,30:809-817.

Meshless Method for Biharmonic Problems

LI Xiao-lin^a, LIN Xin^a, ZHU Jia-lin^a, ZHANG Yong-xing^b

(a. College of Mathematics and Physics;

b. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)

Abstract: The boundary node method (BNM) is a meshless method which combines the moving least-squares (MLS) interpolation scheme with the standard boundary integral equations (BIEs). It retains the meshless of the MLS interpolants and the dimensionality advantage of the BIEs. Since MLS shape functions lack the delta function property, it is difficult to impose boundary conditions in BNM. In order to overcome this problem, a consistent radial boundary node method (CRBNM) was presented. The CRBNM uses consistent compactly supported radial basis functions instead of the MLS to construct its interpolation. Thus the shape function matrices are sparse and have the property of delta function, and the boundary conditions can be applied as easy as in conventional boundary element method. The new boundary-type meshless method is applied to biharmonic problems. Numerical results for some 2D problems were presented, which demonstrate that the proposed meshless method is very effective for biharmonic problems.

Key words: biharmonic equations; boundary node method; radial basis function; consistent compactly supported radial basis functions; meshless method

(编辑 张 苹)