文章编号:1000-582X(2007)12-0089-03

Quantale 中的理想与同余

潘芳芳[1],韩胜伟[2]
(1 西安邮电学院 应用数学与物理系,陕西　西安 710121　2 陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西　西安 710062)

摘　要:从代数角度研究了右侧幂等 Quantale 中的理想和理想余核的具体结构, 并且证明了右侧幂等 Quantale 中的理想和理想余核分别是主理想和简单理想余核. 同时讨论了 Quantale 中理想与同余之间的关系.

关键词:完备格;Quantale;理想;理想余核;同余
中图分类:O153.1　　文献标志码:A

Quantale 的概念是在 1986 年由 C. J. Mulvey 提出的, 其背景在于给研究非交换$_C$ * －代数提供新的格式刻划, 并给量子力学提供新的数学模型。关于 Quantale 理论的基本内容的较系统的介绍始于 1990 年 K. I. Rosenthal 的文献[1]的出版。在短短的二十几年中, 有关 Quantale 理论的大量新的观点及应用相继被揭示(见文献[1-3])。理想是 Quantale 的重要结构, 也是研究 Quantale 的重要工具。文献[4]对 Quantale中的理想进行了研究, 得到了理想与映射之间是一一对应关系。在此基础上, 对右侧幂等 Quantale中的理想和理想余核进行了更加具体的研究, 同时也讨论了 Quantale 中理想与同余之间的关系。

1　预备知识

定义 1　设 Q 是完备格, & 是 Q 上的二元运算且满足:

1) $\forall a,b,c\in Q$, $(a\&b)\ \&c=a\&(b\&c)$;

2) $\forall a\in Q$, $\{b_i\}_i\in Q$, $a\&(\vee b_i)=\vee(a\&b_i)$; $(\vee b_i)\&a=\vee(b_i\&a)$,

则称$(Q,\ \&)$是 Quantale, 简称 Q 是 Quantale。用 0 和 1 分别表示 Q 上的最小元和最大元。

定义 2　设 Q 是 Quantale, $a\in Q$。若 $a\&1\leqslant a(1\&a\leqslant a)$, 则称 a 是右(左)侧元;若 a 既是右侧元又是左侧元, 则称 a 是 Q 的双侧元。

定义 3　用 $R(Q)$, $L(Q)$, $T(Q)$分别表示 Q 上的右侧元,左侧元和双侧元的全体。若 $Q=R(Q)$, 则称 Q 为右侧 Quantale。

例 4　设 Q 是完备格, 定义 Q 上的二元运算为

$$\forall x,y\in Q,\ x\&y=\begin{cases}x, y\neq 0\\0, y=0\end{cases},$$

则$(Q,\ \&)$是 Quantale。称这样的 Quantale 为简单 Quantale。

定义 5　设 Q 是 Quantale。若对任意 $x\in Q$, 有 $x\&x=x$, 则称 Q 是幂等 Quantale。若存在 $e\in Q$, 使得对任意 $a\in Q$, 有 $a\&e=e\&a=a$, 则称 Q 是单位Quantale。

定义 6　设 Q 是 Quantale, S 是 Q 的非空子集。若 S 满足下列条件: 1) $\forall\{s_i\}\in S$, $\vee s_i\in S$; 2) $\forall x\in Q$, $s\in S$, $s\&x, x\&s\in S$, 则称 S 是 Q 的理想。

注 7　1)若 $S=Q$ 或 $S=\{0\}$, 则称 S 是 Q 的平凡理想; 2) 若 S 是 Q 的理想, 则 $\vee S\in T(Q)$。

定义 8[4]　设 Q 是 Quantale, 称保序映射 $g: Q\rightarrow Q$ 是 Q 上的余核映射, 若 $\forall a,b\in Q$, 有 1) $g(a)\leqslant a$; 2) $g(g(a))=g(a)$; 3) $g(a)\&g(b)\leqslant g(a\&b)$。

若余核映射 g 满足 $\forall a,b\in Q$, $(CR:)\ g(a)\&b=g(g(a)\&b)$ (或 $(CL:)\ a\&g(b)=g(g(a)\&g(b))$), 则称 g 是 Q 上的右(左)理想余核; 若余核映射 g 满足 CR 与 CL, 则称 g 是 Q 上的理想余核。

收稿日期:2007-11-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10471083);西安邮电学院青年基金资助项目(1050434);陕西师范大学青年基金资助项目(990131)
作者简介:潘芳芳(1964-),女,助教,硕士,主要从事算子代数方向的研究,(E-mail)hansw@snnu.edu.cn。

定义 9　设 Q 和 K 是 Quantale,$f:Q\to K$ 是保序映射,如果 f 满足:1) $\forall a,b\in Q$, $f(a\&b)=f(a)\&f(b)$;2) $\forall\{b_i\}\subseteq Q$, $f(\vee_i b_i)=\vee_i f(b_i)$,则称 f 是 Q 到 K 之间的 Quantale 同态。

若 f 既是单的又是满的,则称 f 是同构,这时也称 Q 与 K 同构,记作 $Q\cong K$。

定义 10　设 Q 是 Quantale,R 是 Q 上的等价关系,如果 R 满足:1) $\forall a,b,c,d\in Q$, $(a,b),(c,d)\in R\Rightarrow(a\&c,b\&d)\in R$;2) $\forall a_i,b_i\in Q$, $(a_i,b_i)\in R\Rightarrow(\vee a_i,\vee b_i)\in R$,则称 R 是 Q 上的同余关系,简称为 Q 上的同余。

注 11　Q/R 表示 Quantale Q 模 R 所得的等价类之集,即 $Q/R=\{[x]\mid x\in Q\}$。定义 Q/R 上的 & 运算和并运算如下:$\forall[x],[y]\in Q/R$, $[x]\&[y]=[x\&y]$;$\vee\{[x_i]\}\subseteq Q/R$, $\vee[x_i]=[\vee x_i]$。可以验证 Q/R 关于上述运算构成 Quantale。

2　Quantale 中的理想与理想余核

命题 12　设 Q 是 Quantale,g 是 Q 上的映射,则 g 是 Q 上的余核当且仅当 g 是 Q 上的余闭包算子,且 $\forall a,b\in Q$, $g(a)\&g(b)=g(g(a)\&g(b))$。

在文献[2]中满足条件 $\forall a,b\in Q$, $g(a)\&g(b)=g(g(a)\&g(b))$ 的余闭包算子被称为开模态。如果把上述条件加强,即余闭包算子 g 满足 CR 或 CL,由命题 1 可知 g 是余核映射。这样就简化了文献[4]中右(左)理想余核的概念,即右(左)理想余核是满足 $CR(CL)$ 的余闭包算子。下面给出右(左)理想余核的另一个刻画。

命题 13　设 Q 是 Quantale,g 是 Q 上的映射,则 g 是 Q 上的右(左)理想余核当且仅当 g 是 Q 上的余闭包算子,且 $\forall a,b\in Q$, $g(a)\&b\leqslant g(a\&b)$(或 $a\&g(b)\leqslant g(a\&b)$)。

用 $\mathrm{ICN}(Q)$ 表示 Q 上理想余核的全体。设 Q 是单位 Quantale,e 是单位元,$E=\{a\in Q\mid a\&a=a,\ a\leqslant e,\ a\&b=b\&a,\ \forall b\in Q\}$。关于理想余核将有以下结论。

定理 14　设 Q 是 Quantale,则 $\mathrm{ICN}(Q)$ 在逐点序下是完备格。

证明:$\forall\{g_i\}_i\subseteq\mathrm{ICN}(Q)$,令 $g=\vee_i g_i$。则对任意 $x,y\in Q$,有

1) $g(x)=\vee_i g_i(x)\leqslant x$;2) 若 $x\leqslant y$,则 $g(x)=\vee_i g_i(x)\leqslant\vee_i g_i(y)=g(y)$,即 $g(x)\leqslant g(y)$;3) $g(g(x))=g(x)$。这是因为①$g(g(x))\leqslant g(x)$ 显然成立;② 对任意 $x\in Q$, $g(x)=\vee_i g_i(x)=\vee_i g_i(g_i(x))\leqslant\vee_u g_i(\vee_i g_i(x))=g(g(x))$,即 $g(x)\leqslant g(g(x))$。

由 1),2) 和 3) 知 g 是 Q 上的余闭包算子。

4) $g(x)\&y=(\vee_i g_i(x))\&y=\vee_i g_i(x)\&y(\vee_i g_i(x\&y)=g(x\&y)$,即 $g(x)\&y\leqslant g(x\&y)$。同理可证 $x\&g(y)\leqslant g(x\&y)$。

由命题 13 可知 $g\in\mathrm{ICN}(Q)$。因此 $\mathrm{ICN}(Q)$ 是完备格。

命题 14　1) 设 Q 是单位 Quantale,则 $\forall a\in E(Q)$, $\_\wedge a:Q\to Q$ 是余核映射;

2) 设 Q 是单位 Quantale,则 $\forall a\in E(Q)$,

$\_\&a:Q\to Q$ 是理想余核;

3) 设 Q 是幂等 Quantale。定义 $\mathrm{ICN}(Q)$ 上的二元运算 $\&_0$ 如下:$\forall a\in Q$, $g_1,g_2\in\mathrm{ICN}(Q)$, $(g_1\&_0 g_2)(a)=g_1(a)\&_0 g_2(a)$,则 $(\mathrm{ICN}(Q),\&_0)$ 是幂等 Quantale。

命题 15[1]　设 Q 是右侧幂等 Quantale,则

1) $\forall a\in Q$, $\bar{a}=1\&a\in T(Q)$,并且 $\bar{a}$ 是比 a 大的最小双侧元;

2) $\forall a,b,c\in Q$, $a\&b\&c=a\&c\&b$;

3) 如果 $a(b$,则 $a\&b=a$。

命题 16　设 Q 是右侧幂等 Quantale,$a\in Q$,则 $Q\&a=\{x\&a\mid x\in Q\}$ 是 Q 上的理想。

命题 17　设 Q 是右侧幂等 Quantale,则 $\forall a\in T(Q)$, $\downarrow a=\{x\in Q\mid x\leqslant a\}$ 是 Q 上的理想。

称命题 17 中的理想为主理想。

命题 18　设 Q 是右侧幂等 Quantale。若 S 是 Q 上的理想,则存在 $a\in T(Q)$,使 $S=\downarrow a$。

由命题 17 和命题 18 有以下结论。

定理 19　设 Q 是右侧幂等 Quantale,则 Q 中的理想都是主理想。

命题 20　设 Q 是右侧幂等 Quantale。则 Q 只有平凡理想当且仅当 $\forall x,y\in Q$, $x\neq0$, $y\&x=y$。

证明:必要性:若 Q 只有平凡理想,则由注 7 可知 $T(Q)=\{0,1\}$。$\forall x,y\in Q$,且 $x\neq0$,则由命题 15 及 $T(Q)=\{0,1\}$,有 $y\&x=y\&(x\&1)=y\&(1\&x)=y\&1=y$。

充分性:设对任意 $x,y\in Q$, $x\neq0$,有 $y\&x=y$,则 $T(Q)=\{0,1\}$。由定理 19 知 Q 只有平凡理想。

推论 21　设 Q 是右侧幂等 Quantale,则 Q 只有平凡理想当且仅当 Q 是简单 Quantale。

定理 22[4]　设 Q 是 Quantale,$S\subseteq Q$。则 S 是 Q 上的理想当且仅当存在惟一的理想余核 g,使得 $Q_g=S$。

命题 23　设 Q 是右侧幂等 Quantale,则 $\forall a\in Q$, $g=\_\&a$ 是 Q 上的理想余核。

称命题 23 中的理想余核为简单理想余核。

命题 24　设 Q 是右侧幂等 Quantale,g 是 Q 上的

理想余核，则存在 $a\in Q$，使得 $g=\_\&a$。

证明：由定理 22 知 Q_g 是 Q 上的理想。令 $a=\vee Q_g$，则 $a\in T(Q)$。由命题23 知 $h=\_\&a$ 是 Q 上的理想余核。由命题 16 和命题 18 知 $Q_g=\downarrow a=Q\&a=Q_h$。再由定理 22 知 $h=g$，即 $g=\_\&a$。

由命题 13 和命题 14，有下面的结论。

定理 25　设 Q 是右侧幂等 Quantale，则 Q 上的理想余核都是简单理想余核。

3　Quantale 中的理想与同余

文献[5]讨论了 Quantale 中的商与同余的关系。本小节主要讨论 Quantale 中的理想与同余的关系。设 I 是 Quantale Q 中的理想，定义 Q 上的二元关 $\sim_I$ 如下：

$$\forall x,y\in Q, x\sim_I y\Leftrightarrow$$
$$\exists a,b\in I, x\vee a=y\vee b。$$

定理 26　设 Q 是 Quantale，I 是 Q 上的理想，则 $\sim_I$ 是 Q 上的同余。

证明：1）由于 $I\neq\Phi$，取 $p\in I$，有 $a\vee p=a\vee p$，因此 $a\sim_I a$；

2）若 $a\sim_I b$，则存在 $p,q\in I$，使 $a\vee p=b\vee q$，从而 $b\vee q=a\vee p$，即 $b\sim_I a$；

3）若 $a\sim_I b$，$b\sim_I c$，则存在 $p,q,m,n\in I$，使 $a\vee p=b\vee q$，$b\vee m=c\vee n$，从而 $a\vee(p\vee m)=c\vee(q\vee n)$。因为 $p\vee m$，$q\vee n\in I$，所以 $a\sim_I c$；

由 1）、2）和 3）知 $\sim_I$ 是 Q 上的等价关系。

4）若 $a\sim_I b$，$c\sim_I d$，则存在 $p,q,m,n\in I$，使 $a\vee p=b\vee q$，$c\vee m=d\vee n$，从而 $(a\&c)\vee(a\&m\vee p\&c\vee p\&m)=(c\&d)\vee(c\&n\vee m\&d\vee m\&n)$。由于 $a\&m$，$p\&c$，$p\&m$，$c\&n$，$m\&d$，$m\&n\in I$，因此 $(a\&m\vee p\&c\vee p\&m)\in I$，$(c\&n\vee m\&d\vee m\&n)\in I$。由 $\sim_I$ 定义可知 $a\&c\sim_I b\&d$；

5）若 $a_i\sim_I b_i$，则存在 $p_i,q_i\in I$，使 $a_i\vee p_i=b_i\vee q_i$，从而 $(\vee a_i)\vee(\vee p_i)=(\vee b_i)\vee(\vee q_i)$。因为 $\vee p_i$，$\vee q_i\in I$，所以 $\vee a_i\sim_I\vee b_i$。

由 Quantale 同余的定义可知 $\sim_I$ 是 Q 上的同余。

注 27　1）若 $I=\{0\}$，则 $\forall a,b\in Q$，$a\sim_I b\Leftrightarrow a=b$。从而 $\sim_{\{0\}}$ 是 Q 上的最小的同余；

2）若 $1\in I$，则 $\forall a,b\in Q$，$a\sim_i b$。从而 $\sim_i$ 是 Q 上的最大的同余；

3）设 $a\in Q$，$[a]\sim_I=[0]\sim_I\Leftrightarrow a\sim_I 0\Leftrightarrow$ 存在 p，$q\in I$，使 $a\vee p=q\Leftrightarrow$ 存在 $p\in I$，使 $a\vee p\in I$；

4）若 $a\in I$，则 $0\sim_I a$。

命题 28　设 Q 是 Quantale，I 是 Q 上的理想，则 1）$I\subseteq[0]!_I$；2）若 I 是 Q 上的主理想，则 $I=[0]\sim_I$。

命题 29　设 Q 是 Quantale，R 是 Q 上的同余，则 $[0]$ 是 Q 上的主理想。

注 30　设 R 是 Quantale Q 上的同余，$\sim_{[0]_R}$ 是由 $[0]$ 定义的 Q 上的同余。但是 $\sim_{[0]_R}$ 与 R 未必有包含关系。

上面讨论了理想和同余的关系，接下来讨论 Quantale 同态与同余以及 Quantale 同态与理想之间的关系。

命题 31　设 Q，K 是 Quantale，f：$Q\to K$ 是 Quantale同态，定义 Q 上的二元关系 R_f：$\forall x,y\in Q$，$xR_f y\supset f(x)=f(y)$，则 R_f 是 Q 上的同余。

定理 32　设 Q，K 是 Quantale，f：$Q\to K$ 是 Quantale同态，则

1）若 π：$Q\to\dfrac{Q}{R_f}$ 是映射，$\forall a\in Q$，$\pi(a)=[a]$，则 π 是 Quantale 满同态。

2）若 f 是 Quantale 满同态，则 $\dfrac{Q}{R_f}\trianglelefteq K$；

命题 33　设 Q，K 是 Quantale，f：$Q\to K$ 是 Quantale同态，则

1）$f^{-1}(0)=\{x\in Q(f(x)=0\}$ 是 Q 上的理想；

2）π：$Q\to Q/\sim_{f^{-1}(0)}$ 是 Quantale 满同态，且 $f^{-1}(0)\subseteq ker(\pi)$。

由注 30 可知对任意同余 R，R 与 $\sim_{[0]_R}$ 之间未必有包含关系。如果 R 是由 Quantale 同态 f 所确定的同余，即 $R=R_f$，则有

命题 34　设 Q，K 是 Quantale，f：$Q\to K$ 是 Quantale同态，则 $\sim_{[0]_R}\subseteq R_f$，即 $x\sim_{[0]_R y}\Rightarrow xR_f y$。

参考文献：

[1] ROSENTHAL K I. Quantales and their applications[M]. New York: Longman Scientific and Technical, 1990.
[2] YETTER D. Quantales and noncommutative linear logic[J]. Journal of Symbolic Logic, 1990, 55: 41-64.
[3] RESENDE P. Quantales, finite observations and strong bisimulation[J]. Theoretical Computer Science, 2001, 254: 95-149.
[4] HAN S W, ZHAO B. The ideal conuclei on Quantales[J]. 模糊系统与数学, 2007(5):15-20.
[5] 韩胜伟，赵彬. 单纯 Quantale 及其 Quantale 商[J]. 模糊系统与数学, 2005, 19(4): 28-33.

（下转第 94 页）

再由引理4，引理5得：

$$\left[n-8-\frac{10\left(2+\frac{1}{k}\right)}{n-5-\frac{2}{k}}\right]\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant S(r,f)+S(r,g),$$

这与$n\geqslant 12$矛盾,则$H\equiv 0$。

2)$k=2$时,可得$H\equiv 0$。具体证明见文献[3]。

综上$H\equiv 0$,再由引理7有$E(1,F)=E(1,G)$,从而$E(S,F)=E(S,G)$,因此,根据定理B知定理1的结论成立。

参考文献：

[1] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数惟一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.

[2] 李江涛. 具有两个公共值集的亚纯函数的惟一性[J]. 重庆大学学报:自然科学版,2001,24(5):149-152.

[3] 李进东,章启兵. 具有两个公共值集的亚函数[J]. 数学研究与评论,2005,25(2):299-306.

[4] 仪洪勋. 具有两个公共值集的亚纯函数[J]. 数学学报,2002,45(1):75-82.

[5] YI H X. Uniqueness of meromorphic functions and a question of C C Yang[J]. Complex Variables, 1990, 14:169-176.

[6] MOKHONKO A Z. On the nevanlinna characteristics of some meromorphic functions[J]. Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications,1971,14:83-87.

On Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Two Sets

ZHAO Bi-bo, *GU Yong-xing*

(College of Mathematics and Plysics, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)

Abstract: The problem of uniqueness of meromorphic functions is discussed. It is proved that there exists a set S with 12 elements such that any two nonconstant meromorphic functions f and g satisfying $\overline{E}_{3)}(S,f)=\overline{E}_{3)}(S,g)$ and $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$ must be identical.

Keywords: meromorphic; shared set; uniqueness

(编辑 吕建斌)

(上接第91页)

Ideal and Congruence on Quantale

PAN Fang-fang, *HAN Sheng-wei*

(1. Department of Mathematics and Physics, Xi′an University of Post and Telecommunication, xian 710121, P. R. China;
2. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi′an 710062, P. R. China)

Abstract: From the view of algebra, the concrete constructions of ideals and ideal conuclei on right-sided and idempotent Quantale are studied, and it is proved that every ideal is a principal ideal and every ideal conucleus is simple. In the meantime, the relations between the ideal and the congruence were discussed.

Key words: complete lattice; Quantale; ideal; ideal conucleus; congruence

(编辑 张小强)