文章编号:1000-582X(2007)12-0092-03

具有两个公共值集的亚纯函数的惟一性

赵碧波[1],顾永兴[2]
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘　要:讨论了亚纯函数的惟一性问题,证明存在一个具有 12 个元素的集合 S 使得对任意 2 个非常数的亚纯函数 f 与 g,只要满足 $\overline{E}_{3)}(S,f)=\overline{E}_{3)}(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$,必有 $f\equiv g$。

关键词:亚纯函数;公共值集;惟一性
中图分类号:O174.5　　文献标志码:A

1　主要结果

设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,S 为具有不同元素的集合,记号 $E(S,f)$,$\overline{E}(S,f)$,$\overline{E}_{k)}(S,f)$,$\overline{N}_{(k+1}\left(r,\dfrac{1}{F-1}\right)$,$\overline{N}_{K)}\left(r,\dfrac{1}{F-1}\right)$,$\overline{N}_{L}\left(r,\dfrac{1}{F-1}\right)$ 等见文[1-3]。

2001 年,李江涛在文献[2]中得到:

定理 A　设 $S=\{\omega\in c|p(\omega)=a\omega^n-n(n-1)\omega^2+2n(n-2)b\omega-(n-1)(n-2)b^2=0\}$,如果 f 与 g 为 2 个满足 $E_{k)}(S,f)=E_{k)}(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$ 的非常数亚纯函数,则当下列条件之一成立时必有 $f\equiv g$。

1) $k=4,n\geqslant 8$;2) $k=3,n\geqslant 9$;3) $k=2,n\geqslant 10$;4) $k=1,n\geqslant 13$。

2002 年仪洪勋在文献[4]中证明了:

定理 B　设 $S=\{\omega\in c|p(\omega)=a\omega^n-n(n-1)\omega^2+2n(n-2)b\omega-(n-1)(n-2)b^2=0\}$,其中 $n\geqslant 8$,如果 $f(z)$,$g(z)$ 为 2 个满足 $E(S,f)=E(S,g)$ 和 $E(\{\infty\},f)=E(\{\infty\},g)$ 的非常数亚纯函数,则有 $f\equiv g$。

2005 年,李进东和章启兵在文献[3]得到

定理 C　设 $S=\{\omega\in c|p(\omega)=a\omega^n-n(n-1)\omega^2+2n(n-2)b\omega-(n-1)(n-2)b^2=0\}$,如果 f 与 g 为两个满足 $\overline{E}_{k)}(S,f)=\overline{E}_{k)}(S,g)$,和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$ 的非常数亚纯函数,则当下列条件之一成立时必有 $f\equiv g$。

1) $k\geqslant 3,n\geqslant 13$;2) $k=2,n\geqslant 14$。

改进了定理 C,得到:

定理 1　设 $S=\{\omega\in c|p(\omega)=a\omega^n-n(n-1)\omega^2+2n(n-2)b\omega-(n-1)(n-2)b^2=0\}$,$f$ 与 g 为 2 个满足 $\overline{E}_{k)}(S,f)=\overline{E}_{k)}(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$ 的非常数亚纯函数。若 $k\geqslant 3,n\geqslant 12$,则 $f\equiv g$。

2　几个引理

设 $p(\omega)=a\omega^n-n(n-1)\omega^2+2n(n-2)b\omega-(n-1)(n-2)b^2$,其中 a 与 b 是 2 个非零常复数,满足 $ab^{n-2}\neq 2$,设 α_1,α_2 为方程 $p(\omega)=0$ 的 2 个判别根,$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为 $p(\omega)$ 的 n 个单零点(参看文献[4])。令 $F=R(f)$,$G=R(g)$,其中

$$R(\omega)=\frac{a\omega^n}{n(n-1)(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)},$$

则

$$\left.\begin{aligned}F'&=\frac{(n-2)af^{n-1}(f-b)^2}{n(n-1)(f-\alpha_1)^2(f-\alpha_2)^2}\\G'&=\frac{(n-2)ag^{n-1}(g-b)^2}{n(n-1)(g-\alpha_1)^2(g-\alpha_2)^2}\end{aligned}\right\}。\tag{1}$$

引理 1[5]　设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,n 为正整数,则

$$N(r,\frac{1}{f^{(n)}})\leqslant N(r,\frac{1}{f})+n\overline{N}(r,f)+S(r,f)。$$

引理 2[6]　设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,$R(f)=\dfrac{P(f)}{Q(f)}$,其中 $P(f)=\sum\limits_{k=0}^{p}a_kf^k$ 和 $Q(f)=\sum\limits_{j=0}^{q}b_jf^j$ 是 2 个

收稿日期:2007-07-09
作者简介:赵碧波(1982-),男,重庆大学硕士研究生,主要从事单复变函数论方向研究;顾永兴(联系人),教授,博士生导师,(E-mail):yxgu@cqu.edu.cn。

互质的关于 f 的多项式，系数 $\{a_k(z)\}$ 和 $\{b_j(z)\}$ 均为 f 的小函数，且 $a_p(z)$ 和 $b_q(z)$ 都不恒等于零，则

$$T(r,R(f))=\max\{p,q\}T(r,f)+S(r,f)。$$

$\overline{N}_{1)}\left(r,\dfrac{1}{F-1}\right)$ 表示 F 的单 1 值点，不计重数。

引理 3　设 F,G 为 2 个非常数的亚纯函数，满足 $\overline{E}_{k)}(1,F)=\overline{E}_{k)}(1,G)$。设

$$H=\left(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}\right)。\qquad(2)$$

如果 H 不恒为零，则

$$\overline{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N(r,H)+S(r,F)+S(r,G),$$

$$\overline{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N(r,H)+S(r,F)+S(r,G)。$$

证　由式(2)知 $m(r,H)=S(r,F)+S(r,G)$。设 z_0 为 F 的单 1 值点，由 $\overline{E}_{k)}(1,F)=\overline{E}_{k)}(1,G)$，知 $\overline{E}_{1)}(1,F)=\overline{E}_{1)}(1,G)$，即 z_0 也为 G 的单 1 值点。设在 z_0 附近

$$F-1=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots,(a_1\neq 0),$$

于是

$$\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}=-\frac{2}{z-z_0}+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots,$$

对 G 也有类似的关系式，故 $H(z_0)=0$。因此引理的结论成立。

引理 4[3]　若 $\overline{E}_{k)}(1,F)=\overline{E}_{k)}(1,G)$，$k\geqslant 2$，$\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$，则有

$$\overline{N}_{k)}^{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant$$
$$T(r,f)+\overline{N}(r,f)+S(r,f),$$

$$\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=\sum_{j=1}^{n}\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-\omega_j}\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\leqslant\frac{1}{k}T(r,f)+\frac{1}{k}\overline{N}(r,f)+S(r,f)。$$

对 G 也有类似的关系式。

引理 5[3]　设 $U=\left(\dfrac{F'}{F-1}-\dfrac{F'}{F}\right)-\left(\dfrac{G'}{G-1}-\dfrac{G'}{G}\right)$ 不恒为零且 $\overline{E}_{k)}(1,F)=\overline{E}_{k)}(1,G)$，$k\geqslant 2$，$\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$，则

$$\left(n-5-\frac{2}{k}\right)\overline{N}(r,f)\leqslant\left(2+\frac{1}{k}\right)\{T(r,f)+T(r,g)\}+$$
$$S(r,f)+S(r,g)。$$

引理 6[4]　设 $h=\dfrac{F''}{F'}-\dfrac{2F'}{F-1}$，若 z_0 是 F 的一个单极点，则 h 在 z_0 点正则。

引理 7[3]　H 被式(2)给出，若 $H\equiv 0$，则 $E(1,F)=E(1,G)$。

3　定理 1 的证明

由定理条件 $\overline{E}_{k)}(S,f)=\overline{E}_{k)}(S,g)$ 有

$$\overline{E}_{k)}(1,F)=\overline{E}_{k)}(1,G),\overline{E}_{1)}(1,F)=\overline{E}_{1)}(1,G)。\qquad(3)$$

考虑到 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$，结合(1)和引理 6 有：

$$N(r,H)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+\overline{N}(r,f)+N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+$$
$$\overline{N}_{k)}^{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right)+$$
$$N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+\overline{N}_{k)}^{L}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)。\qquad(4)$$

这里 $N_0\left(r,\dfrac{1}{f'}\right)$ 表示 f' 的零点但不是 $f(f-b)(F-1)$ 的零点的密指量，$N_0\left(r,\dfrac{1}{g'}\right)$ 类似定义。

根据第二基本定理得，

$$(n+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+$$
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+\overline{N}(r,f)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+$$
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right)+$$
$$\overline{N}(r,g)-N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g)。\qquad(5)$$

使用引理 3，式(4)，(5)得

$$(n-3)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+$$
$$\overline{N}_{k)}^{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-$$
$$\frac{1}{2}\overline{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}_{k)}^{L}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+$$
$$\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+3\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)。\qquad(6)$$

1）$k\geqslant 3$ 时，由引理 2 有：

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant\frac{n}{2}T(r,f)+S(r,f)。\qquad(7)$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-\frac{1}{2}\overline{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant$$
$$\frac{n}{2}T(r,g)+S(r,g)。\qquad(8)$$

从式(6)，(7)，(8)，有：

$$(n-3)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant\frac{n}{2}T(r,f)+$$
$$\overline{N}_{k)}^{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\frac{n}{2}T(r,g)+\overline{N}_{k)}^{L}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+$$
$$3\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)。\qquad(9)$$

再由引理4,引理5得:

$$\left[n-8-\frac{10\left(2+\frac{1}{k}\right)}{n-5-\frac{2}{k}}\right]\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant S(r,f)+S(r,g),$$

这与$n\geqslant 12$矛盾,则$H\equiv 0$。

2)$k=2$时,可得$H\equiv 0$。具体证明见文献[3]。

综上$H\equiv 0$,再由引理7有$E(1,F)=E(1,G)$,从而$E(S,F)=E(S,G)$,因此,根据定理B知定理1的结论成立。

参考文献:

[1] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数惟一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.
[2] 李江涛. 具有两个公共值集的亚纯函数的惟一性[J]. 重庆大学学报:自然科学版,2001,24(5):149-152.
[3] 李进东,章启兵. 具有两个公共值集的亚函数[J]. 数学研究与评论,2005,25(2):299-306.
[4] 仪洪勋. 具有两个公共值集的亚纯函数[J]. 数学学报,2002,45(1):75-82.
[5] YI H X. Uniqueness of meromorphic functions and a question of C C Yang[J]. Complex Variables, 1990, 14:169-176.
[6] MOKHONKO A Z. On the nevanlinna characteristics of some meromorphic functions [J]. Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications,1971,14:83-87.

On Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Two Sets

ZHAO Bi-bo, *GU Yong-xing*
(College of Mathematics and Plysics, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)

Abstract: The problem of uniqueness of meromorphic functions is discussed. It is proved that there exists a set S with 12 elements such that any two nonconstant meromorphic functions f and g satisfying $\overline{E}_{3)}(S,f)=\overline{E}_{3)}(S,g)$ and $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$ must be identical.

Keywords: meromorphic; shared set; uniqueness

(编辑 吕建斌)

(上接第91页)

Ideal and Congruence on Quantale

PAN Fang-fang, *HAN Sheng-wei*
(1. Department of Mathematics and Physics, Xi'an University of Post and Telecommunication, xian 710121, P. R. China;
2. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, P. R. China)

Abstract: From the view of algebra, the concrete constructions of ideals and ideal conuclei on right-sided and idempotent Quantale are studied, and it is proved that every ideal is a principal ideal and every ideal conucleus is simple. In the meantime, the relations between the ideal and the congruence were discussed.

Key words: complete lattice; Quantale; ideal; ideal conucleus; congruence

(编辑 张小强)