文章编号:1000-582X(2007)12-0095-03

二部图的[r,s,t]-着色

龚 劬[1],张新军[1,2]

(1.重庆大学 数理学院,重庆 400030;2.莆田学院 数学系,福建 莆田 351100)

摘 要:给出了二部图 G 的[r,s,t]-色数的界及它达到下界时的条件,讨论了星作为特殊二部图的[r,s,t]-色数,得到的结果为若 G 是二部图,$\forall v_1,v_2\in V_\Delta, v_1v_2\notin E(G)$,$\forall u\in V$,$\exists u_1\in N_G(u)$,使得 $d_G(u_1)=1$,且 $s\geqslant 2t, r\leqslant t$,则 $\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-1)s+1$;若 G 是二部图,且 $r\geqslant(\Delta-1)s+2t$,则 $\chi_{r,s,t}(G)=r+1$;若 G 是二部图,且 $(\Delta-1)s+t<r\leqslant(\Delta-1)s+2t$,则 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+2t+1$;若 G 是二部图,则 $r\Delta+1\leqslant\chi_{r,r,r}(G)\leqslant r(\Delta+1)+1$。

关键词:[r,s,t]-着色;[r,s,t]-色数;二部图;星

中图分类号:O157.5 文献标志码:A

研究所涉及的图 G 均为简单有限连通图,$\Delta(G)=\Delta$ 表示图 $G(V,E)$ 的最大度,V_Δ 表示由最大度顶点的集合,$\chi''(G)$ 和 $\chi_{r,s,t}(G)$ 分别表示点色数,边色数,全色数和[r,s,t]-色数,$d_G(u)$ 和 $N_G(u)$ 分别表示 $G(V,E)$ 的顶点 u 的度数和 u 的邻接集,未定义的符号和术语可参考文献[1]。

图的着色理论在现实生活中有广泛的应用,如排课表问题、存储问题、电路安排问题、交通问题、频道分配问题等等。内容丰富,有点着色、边着色、全着色、分数着色、列表着色等等。最近,A. Kemnitz 和 M. Marangio又提出了[r,s,t]-着色,它推广了经典的点着色、边着色和全着色,应用也非常广泛,比如一些比赛的赛前训练安排,要求既有足够的时间训练,又能得到充分的休息,而且还要保证所需要的时间最短等。目前对[r,s,t]-着色的研究文献不多,主要的是文献[2-3]。文献[2]提出了[r,s,t]-着色和[r,s,t]-色数,并给出有关的一些性质、定理,讨论的完全图的[r,s,t]-色数;文献[3]中讨论了满足 $\theta(r,s,t,k)=\{G:\chi_{r,s,t}(G)\leqslant k\}$ 图的一些性质,但未对一些图给出具体的[r,s,t]-色数,笔者就二部图给出它[r,s,t]-色数。

1 预备知识

下面给出[r,s,t]-着色和[r,s,t]-色数的定义:

定义 1[2] 给定非负整数 r,s 和 t,且 $\max\{r,s,t\}\geqslant 1$,图 $G(V,E)$ 的一个 k-[r,s,t]-着色是指从 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{0,1,\cdots,k-1\}$,$k\in N$ 的一个映射 c,如果 c 满足下列条件:

1)对 V 中相邻的点 v_i,v_j,有 $|c(v_i)-c(v_j)|\geqslant r$;2)对 E 中相邻的边 e_i,e_j,有 $|c(e_i)-c(e_j)|\geqslant s$;3)对 $V\cup E$ 中相关联的点 v_i 和边 e_j,有 $|c(v_i)-c(e_j)|\geqslant t$,

则称 c 为 G 的一个[r,s,t]-着色。

定义 2[2] 使得图 G 存在 k-[r,s,t]-着色的最小的值 k,称为图 G 的[r,s,t]-色数,记作 $\chi_{r,s,t}(G)$。

显然,[r,s,t]-着色是对点着色、边着色和全着色的推广,因为[1,0,0]-着色是正常的点着色,[0,1,0]-着色是正常的边着色,[1,1,1]-着色是正常的全着色,即 $\chi_{1,0,0}(G)=\chi(G)$,$\chi_{0,1,0}(G)=\chi'(G)$,$\chi_{1,1,1}(G)=\chi''(G)$。下面几个引理是文献[2]得到的部分结论。

引理 1[2] 若 $r'\leqslant r, s'\leqslant s, t'\leqslant t$,则 $\chi_{r',s',t'}(G)\leqslant\chi_{r,s,t}(G)$。

引理 2[2] 如果 a 是正整数,则 $\chi_{ar,as,at}(G)=a(\chi_{r,s,t}(G)-1)+1$。

收稿日期:2007-10-02

作者简介:龚劬(1963-),女,重庆大学教授,主要从事图论,小波分析方向的研究,(Tel)65402821;(E-mail)gongqu@cqu.edu.cn.

由此引理知,在对图 G 进行$[r,s,t]$-着色时,只需考虑 r,s,t 的公因子为1的情况。

推论1[2] $\chi_{r,r,r}(G)=r(\chi''(G)-1)+1$。

引理3[2] $\max\{r(\chi(G)-1)+1,s(\chi'(G)-1)+1,t+1\}\leqslant\chi_{r,s,t}(G)\leqslant r(\chi(G)-1)+s(\chi'(G)-1)+t+1$

引理4[2] 若 G 是 $\Delta(G)\geqslant 2$ 的第一类图,则

$$\chi_{0,s,t}(G)=\begin{cases}(\Delta-1)s+1,\ s\geqslant 2t;\\(\Delta-2)s+2t+1,\ t\leqslant s<2t;\\(\Delta-1)s+t+1,\ s<t。\end{cases}$$

2 主要结果及证明

Behzad 和 Vizing 在文献[4-5]中独立提出了全着色猜想:对任意图 G 有 $\chi''(G)\leqslant\Delta+2$。全着色猜想对一些特殊图已经证明是正确的,如完全图、二部图、完全多部图等,具体可参见文献[6]。

推论2 若 G 是二部图,则 $\max\{r+1,s(\Delta-1)+1,t+1\}\leqslant\chi_{r,s,t}(G)\leqslant r+s(\Delta-1)+t+1$。

证明:若 G 是二部图,则 $\chi(G)=2,\chi'(G)=\Delta$,代入引理3即可。

推论3 若 G 是二部图,则它满足全着色猜想,即 $\chi''(G)\leqslant\Delta+2$。

证明:因为 G 是二部图,所以 $\chi(G)=2,\chi'(G)=\Delta$,又 $\chi''(G)=\chi_{1,1,1}(G)$,所以由引理3知 $\chi''(G)\leqslant(\chi(G)-1)+(\chi'(G)-1)+1+1=(2-1)+(\Delta-1)+1+1=\Delta+2$。

定理1 1)若 G 是二部图,$\forall v_1,v_2\in V_\Delta,v_1v_2\notin E(G),\forall u\in V,\exists u_1\in N_G(u)$,使得 $d_G(u_1)=1$;且 $s\geqslant 2t,r\leqslant t$,则 $\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-1)s+1$。

2)若 G 是二部图,且 $r\geqslant(\Delta-1)s+2t$,则 $\chi_{r,s,t}(G)=r+1$。

3)若 G 是二部图,且 $(\Delta-1)s+t<r\leqslant(\Delta-1)s+2t$,则 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+2t+1$。

4)若 G 是二部图,则 $r\Delta+1\leqslant\chi_{r,r,r}(G)\leqslant r(\Delta+1)+1$。

证明:1)先考虑一个含有最大度顶点的 $K_{1,\Delta}$,设与 $K_{1,\Delta}$ 中心同部的点的集合记作 X,另一部记作 Y,设 u_1 为 $K_{1,\Delta}$ 的一度顶点,因为 $s\geqslant 2t,r<t$,所以可将 $K_{1,\Delta}$ 的中心着 t 色,u_1 着 $t+r$ 色,与 u_1 相关联的边着0色,其余的边依次着 $s,2s,\cdots,(\Delta-1)s$ 色,其余的点着0色。因为 G 的最大度顶点不相邻,且所有的最大度顶点都存在一度的相邻点,于是,如果最大度顶点 $u\in X$(或 $u\in Y$),则在 $Y(X)$ 中选取一个与 u 关联的一度顶点着 $t+r$ 色,与该一度点相关联的边着0色,与 u 相邻的其余顶点着0色,它们的边可以按 $|c(e_i)-c(e_j)|\geqslant s$ 的规则进行着色,此时可用 $(\Delta-1)s+1$ 种颜色进行着色,所以 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+1$。而由推论2知,$\chi_{r,s,t}(G)\geqslant(\Delta-1)s+1$。所以 $\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-1)s+1$。

2)因为 $r\geqslant(\Delta-1)s+2t$,于是可将图 G 的 X 部顶点着0色,Y 部顶点着 r 色,它的一个最大度顶点所关联的边可依次着 $t,t+s,\cdots,t+(\Delta-1)s$,其它的边可按 $|c(e_i)-c(e_j)|\geqslant s$ 的规则进行着色,此时只用了 $r+1$ 种颜色,所以 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant r+1$。而由推论2知,$\chi_{r,s,t}(G)\geqslant r+1$。所以 $\chi_{r,s,t}(G)=r+1$。

3)因为 $(\Delta-1)s+t<r\leqslant(\Delta-1)s+2t$,所以 X 部顶点和图 G 的边可按2)的方法进行着色,Y 部的顶点可着 $(\Delta-1)s+2t$ 色,此时可用 $(\Delta-1)s+2t+1$ 种颜色进行着色,所以 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+2t+1$。

4)因为 G 是二部图,由推论3知,$\Delta+1\leqslant\chi''(G)\leqslant\Delta+2$。又 $\chi_{r,r,r}(G)=r(\chi''(G)-1)+1$。所以 $r\Delta+1\leqslant\chi_{r,r,r}(G)\leqslant r(\Delta+1)+1$。

定理2 若 $G=K_2$,则 $\chi_{r,s,t}(G)=\begin{cases}r+1,r\geqslant 2t;\\2t+1,t\leqslant r<2t;\\r+t+1,r<t。\end{cases}$

证明:由推论2知,$r+1\leqslant\chi_{r,s,t}(G)\leqslant r+t+1$。因为 $G=K_2$,设 $e=uv$,c 是它的一个$[r,s,t]$-着色,设 $c(u)\leqslant c(v)$。当 $r\geqslant 2t$ 时,$c(u)=0,c(v)=r,c(e)=t$。所以 $\chi_{r,s,t}(G)=r+1$。当 $r<2t$ 时,若 $c(e)\leqslant c(u)$ 或 $c(e)\geqslant c(v)$ 时,至少需要 $r+t+1$ 种颜色;当 $c(u)\leqslant c(e)\leqslant c(v)$ 时,至少需要 $2t+1$ 种颜色,所以,当 $t\leqslant r<2t$ 时,$\chi_{r,s,t}(G)\geqslant 2t+1$。当 $r<t$ 时,$\chi_{r,s,t}(G)\geqslant r+t+1$。又 $t\leqslant r<2t,c(u)=0,c(v)=2t,c(e)=t$。即 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant 2t+1$。当 $r<t$ 时,$c(u)=0,c(v)=r,c(e)=r+t$。即 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant r+t+1$。

所以 $\chi_{r,s,t}(G)=\begin{cases}r+1,r\geqslant 2t;\\2t+1,t\leqslant r<2t;\\r+t+1,r<t。\end{cases}$

设 G 是星,即 $G=K_{1,\Delta(G)}$,记 G 的中心为 v_0,其它的顶点从左到右依次记作 $v_1,v_2,\cdots v_\Delta,e_i=v_0v_i,i=1,2,\cdots,\Delta$。下面来讨论 $\Delta(G)\geqslant 2$ 时星的$[r,s,t]$-色数。

定理3 若 $G=K_{1,\Delta(G)}$,且 $\Delta(G)\geqslant 2$,则

1)若 $is\leqslant r\leqslant(i+1)s-2t,(i=0,1,\cdots,\Delta-2),r>t,s\geqslant 2t$,则 $\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-1)s+1$。

2)若 $t\leqslant s<2t$ 且 $r\leqslant(\Delta-2)s$,则 $\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-2)s+2t+1$。

3)若 $is<r\leqslant(i+1)s$ 且 $\dfrac{t}{\Delta-(i+1)}\leqslant s<t,i=0,1,\cdots,\Delta-3$,则 $\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-1)s+t+1$。

4)若 $(\Delta-2)s<r\leqslant(\Delta-1)s,s<t$,则 $(\Delta-1)s+t+1\leqslant\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-2)s+2t+1$。

5)若 $(\Delta-2)s<r\leqslant(\Delta-1)s,t\leqslant s<2t$,则 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+t+1$。

6)若 $(\Delta-2)s<r<(\Delta-1)s,r>t,s\geqslant 2t$,则 $\chi_{r,s,t(G)}\leqslant r+2t+1$。

证明:1)设 c 是 G 的一个$[r,s,t]$-着色,不妨设 $c(e_1)\leqslant c(e_2)\leqslant\cdots\leqslant c(e_\Delta)$,则 $c(e_j)=(j-1)s,j=1,2,\cdots,\Delta$。由 $s\geqslant 2t$,即 $s-t\geqslant t$,则 $c(v_0)=t$,又因 $r>t$,且 $is\leqslant$

$r\leqslant(i+1)s-2t,(i=0,1,\cdots,\Delta-2),t+r\leqslant(i+1)s-t<(\Delta-1)s,i=0,1,\cdots,\Delta-2$。则 $c(v_j)=t+r,\ j=1,2,\cdots,i+1$。而$[(i+1)s-t]-t\geqslant r$,则 $c(v_j)=(i+1)s-t$,

$j=i+2,i+3,\cdots,\Delta,i=0,1,\cdots,\Delta-2$,所以 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+1$。又由推论 2 知,$\chi_{r,s,t}(G)\geqslant(\Delta-1)s+1$,所以 $\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-1)s+1$。

2)由 $t\leqslant s<2t$,当 $c(v_0)<c(e_1)$ 或 $c(v_0)>c(e_\Delta)$ 时,至少需要 $s(\Delta-1)+t+1$ 种颜色;当 $c(e_i)\leqslant c(v_0)\leqslant c(e_{i+1}),i=1,2,\cdots,\Delta-1$ 时,至少需要 $s(i-1)+2t+s(\Delta-(i+1))+1=s(\Delta-2)+2t+1$ 种颜色。$r\leqslant s(\Delta-2)$,则 $s(\Delta-2)+2t-t-t\geqslant r$,且 $s(\Delta-3)+2t+t-t\geqslant r$,可按如下方法进行着色:$c(e_1)=0;c(e_i)=2t+(i-2)s,2\leqslant i\leqslant\Delta;c(v_0)=t;c(v_i)=s(\Delta-3)+3t,1\leqslant i\leqslant\Delta-1;c(v_\Delta)=s(\Delta-2)+t$。所以,$\chi_{r,s,t}(G)\leqslant s(\Delta-2)+2t+1$。由引理 1 和引理 4 可得 $\chi_{r,s,t}(G)\geqslant\chi_{0,s,t}$,$(G)=s(\Delta-2)+2t+1$,$\chi_{r,s,t}(G)=s(\Delta-2)+2t+1$。

3)因 $is<r\leqslant(i+1)s$,且 $\dfrac{t}{\Delta-(i+1)}\leqslant s<t,i=0,1,\cdots,\Delta-3$。所以 $2t+is\leqslant t+(\Delta-1)s,i=0,1,\cdots,\Delta-3$。则可进行如下的$[r,s,t]$ - 着色:$c(v_0)=0,c(e_j)=t+(j-1)s,\ j=1,2,\cdots,\Delta;c(v_j)=2t+is,j=1,2,\cdots,i+1;c(v_j)=(i+1)s,j=i+2,\cdots,\Delta,i=0,1,\cdots,\Delta-3$。所以 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+t+1$。又由引理 1 和引理 4 得

$$\chi_{r,s,t}(G)\geqslant\chi_{0,s,t}(G)=(\Delta-1)s+t+1,$$

所以　$\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-1)s+t+1$。

4)因 $G=K_{1,\Delta(G)}$,且 $s<t$,所以当 $c(v_0)<c(e_1)$ 或 $c(v_0)>c(e_\Delta)$ 时,至少需要 $s(\Delta-1)+t+1$ 种颜色;当 $c(e_i)\leqslant c(v_0)\leqslant c(e_{i+1}),i=1,2,\cdots,\Delta-1$。时,至少需要 $s(i-1)+2t+s(\Delta-(i+1))+1=s(\Delta-2)+2t+1$ 种颜色,且 $(\Delta-1)s+t+1<(\Delta-2)s+2t+1$。又 $(\Delta-2)s<r\leqslant(\Delta-1)s,s<t$,于是,$c(v_0)=0,c(e_j)=(j-1)s+t,c(v_j)=(\Delta-2)s+2t,j=1,2,\cdots,\Delta-1$。$c(v_\Delta)=(\Delta-1)s$。所以 $(\Delta-1)s+t+1\leqslant\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-2)s+2t+1$。

5)因 $t\leqslant s<2t$,且 $(\Delta-2)s<r\leqslant(\Delta-1)s$,所以 $(\Delta-2)s+2t+1\leqslant(\Delta-1)s+t+1,(\Delta-2)s+2t>(\Delta-1)s\geqslant r$。于是可进行如下着色:$c(v_0)=0;c(e_j)=(j-1)s+t,j=1,2,\cdots,\Delta;c(v_j)=(j-2)s+2t,j=1,2,\cdots,\Delta;c(v_\Delta)=(\Delta-1)s$。所以 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+t+1$。

6)因 $(\Delta-2)s<r<(\Delta-1)s,r>t,s\geqslant 2t$,所以可进行如下着色:$c(e_j)=(j-1)s,\ j=1,2,\cdots,\Delta-1;c(v_j)=r+t,j=1,2,\cdots,\Delta;c(e_\Delta)=r+2t$。所以 $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant r+2t+1$。

参考文献:

[1] BONDY J A,MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London:Macmillan,1976.

[2] KEMNITZ A,MARANGIO M. [r,s,t]-colorings of graphs[J]. Discrete Math,2007,307:199-207.

[3] KEMNITZ A, MARANGIO M. [r,s,t]-chromatic numbers and hereditary properties of graphs[J]. Discrete Math,2007, 307:916-922.

[4] BEHZAD M. Graphs and their chromatic numbers[D]. Michigan:[s. n.],1965.

[5] VIZING V G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph[J]. Metody Diskret,1964,3:25-30.

[6] YAP H P. Total colourings of graphs[M]. Berlin: Lecture Notes in Mathematics,1996.

[r,s,t]-Coloring of the Bipatite graph

GONG Qu[1], *ZHANG Xin-jun*[1,2]

(1. College of Mathematics and Physics,Chongqing University, Chongqing 400030,P. R. China

2. Mathematics Department Putian University, Putian 351100,P. R. China)

Abstract: A. Kemnitz and M. Marangio first give us the concept of $[r,s,t]$-colorings,it is a generalization of the classical graph colorings ,such as proper vertex coloring , edge coloring and total coloring. In this paper, we obtain the bounds of the $[r,s,t]$-chromatic number of the bigraph and the conditions of the lower bound achieved, talking about the $[r,s,t]$-chromatic number of the star, we get the main results as follows:1) If G is bipartite graph, $\forall v_1,v_2\in V_\Delta,v_1v_2\notin E(G)$,for all $u\in V_\Delta$,there exists $u_1\in N_G(u)$ makes $d_G(u_1)=1$ and $s\geqslant 2t,r\leqslant t$,then $\chi_{r,s,t}(G)=(\Delta-1)s+1$. 2) If G is bipartite graph and $r\geqslant(\Delta-1)s+2t$,then $\chi_{r,s,t}(G)=r+1$. 3) If G is bipartite graph and $(\Delta-1)s+t<r\leqslant(\Delta-1)s+2t$,then $\chi_{r,s,t}(G)\leqslant(\Delta-1)s+2t+1$. 4) If G is bipartite graph ,then $r\Delta+1\leqslant\chi_{r,r,r}(G)\leqslant r(\Delta+1)+1$.

Key words: $[r,s,t]$-coloring; $[r,s,t]$-chromatic; bipartite graph; star

(编辑　侯　湘)