

文章编号:1000-582X(2007)12-0102-04

有束单间隙微波腔中的非稳态过程

廖旭,任学藻,周自刚 谢鸿全

(西南科技大学理学院,四川绵阳621010)

摘要:以单间隙微波腔为研究对象,将电子束作为激励源,根据 Maxwell 方程和电子受到的洛伦兹力,建立微波腔在电子束作用下的激励方程和电子束在微波场作用下的运动方程(即微波谐振腔中电子束同微波场相互作用的自洽方程组),由此进一步研究一维情况下束波互作用的非稳态作用过程,在理论上给出:当工作电流远大于起振电流时,微波腔在非稳态过程中产生很强的窄脉冲辐射。

关键词:高功率微波;单间隙微波腔;超辐射;非稳态过程

中图分类号: TN12

文献标志码: A

在高功率微波技术研究中,越来越关注微波腔中电子束同微波之间互作用的非稳态过程,它不仅涉及到微波腔中微波建场,而且同目前兴起的超辐射现象密切相关^[1-2]。微波腔中电子束与微波场的相互作用在物理上可以理解为:微波场影响电子的运动,同时电子束作为电流源也产生辐射,影响微波场,是一个闭环系统^[3-4]。理论上,微波腔中的微波场可以按其模式展开,不同模式同电子束之间的相互作用不同,电子束作为激励源,在微波腔中激励起不同模式的微波场,反过来,这些不同模式的微波场也影响电子束电子的运动,从而影响电子束同微波腔之间的相互作用,根据 Maxwell 方程和电子受到的洛伦兹力,可以建立不同模式在电子束作用下的激励方程以及电子在不同模式作用下的运动方程。由此,根据微波腔的本征模式和电子束的初始状态可以确定电子束同微波腔之间的相互作用,而微波腔的本征模式可以通过一些理论分析和程序^[5-7]计算得到,因此利用分析和数值模拟技术,可以得到电子束同微波腔之间的非稳态作用过程,以便深入分析其物理过程。

1 理论和模型

1.1 微波腔模式

微波腔中的微波场可以按微波腔的模式^[8]展开,即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1} a_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1} b_n(t) \mathbf{B}_n(\mathbf{r}), \quad (1)$$

式中 $a_n(t)$ 和 $b_n(t)$ 为展开系数;

$$a_n(t) = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) dV, \\ b_n(t) = \int_V \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}_n(\mathbf{r}) dV, \quad (2)$$

积分遍及微波腔的体积 V , $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{B}_n(\mathbf{r})$ 为微波腔本征模式,这些模式构成了一个归一化的完全集^[9]。

$$\int_V \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{m,n}, \\ \int_V \mathbf{B}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{m,n}, \quad (3)$$

由此,根据 Maxwell 方程,可以得到关于展开系数 $a_n(t)$ 和 $b_n(t)$ 的方程,同时微波腔中电场和磁场是相关的,由电场可以确定磁场。这里由 Maxwell 方程,可以得到展开系数 a_n 和 b_n 的关系近似为

$$b_n = -j \frac{1}{c} \frac{\omega_0}{\omega_n} a_n, \quad (4)$$

因而,这里只讨论关于展开系数 $a_n(t)$ 满足的方程,该方程为^[10]

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \omega_{0n}^2 a_n(t) = -\frac{\omega_{0n} c}{\mu} \int_s (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_n) \cdot d\mathbf{s} + \\ c^2 \frac{d}{dt} \int_s (\mathbf{B} \times \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{s} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_n dV, \quad (5)$$

收稿日期:2007-07-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10347009)

作者简介:廖旭(1961-),男,西南科技大学副教授,主要从事电磁场及微波理论研究,(E-mail)xk@126.com。

式中 ω_{0n} 是模式 \mathbf{E}_n 所对应的本征频率, \mathbf{J} 是微波腔中激励源电流密度分布。

这里用微波腔的品质因子表示边界场的微波场的影响, 则方程(5)可以表示为

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) + \frac{\omega_n}{Q_n} \frac{da_n(t)}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_n dV, \quad (6)$$

式中品质因子 Q_n 包含负载影响, 即 $\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_{0n}} + \frac{1}{Q_{ex}^{(n)}}$ (Q_{0n} 为微波腔本征品质因子, $Q_{ex}^{(n)}$ 为负载品质因子)。

1.2 电子动力学方程

由式(1), 电子在微波腔中的运动方程为

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = e \left(\sum_{n=1} a_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_0 \right) - e \left(\sum_{n=1} b_n(t) \mathbf{v} \times \mathbf{B}_n(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \right) + e\mathbf{E}_{sc}, \quad (7)$$

式中 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 为电子在微波腔中的运动速度, \mathbf{r} 为电子在微波腔中的位矢, \mathbf{E}_0 和 \mathbf{B}_0 为微波腔中的直流电场和磁场, \mathbf{E}_{sc} 为空间电荷场。

由此可以得到微波腔中电子的运动状态, 不仅是时间的函数, 而且还决定于电子进入微波腔时的初始状态 $(t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0)$, 可以表示为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t, t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0), \quad (8)$$

则微波腔中电荷密度分布和电流密度分布为

$$\rho(t, \mathbf{r}') = e \sum_i^{N_e} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)) \mathbf{J}(t, \mathbf{r}') = e \sum_i^{N_e} \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)), \quad (9)$$

式中 N_e 为 t 时刻微波腔中的电子数。

1.3 束波相互作用自洽方程

理论上根据电子束的初始状态 $\rho_0(t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0)$ 和微波腔的模式 \mathbf{E}_n , 由方程(6)、(7)和(9), 可以得到微波腔中微波场的变化和电子束的运动过程, 但是无论数值或解析求解该方程组, 都很困难。

在微波腔中, 由于只有同微波腔模式有关的频率 ω_n 才与电子束作用, 而其他频率微波的影响很小, 令 $a_n(t) = -j\alpha_n(t) e^{j(\omega_n t + \beta_n(t))}$, 由方程(6)可得

$$\frac{\alpha_n'}{Q_n} + [\omega_{0n}^2 - \omega_n - 2\omega_n \beta_n'] \alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_n}} JJ_n(t') \sin(\omega_n t' + \beta_n) dt', \quad (10)$$

$$2\omega_n \alpha_n' + \frac{\omega_n}{Q_n} \alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_n}} JJ_n(t') \cos(\omega_n t' + \beta_n) dt', \quad (11)$$

$$\text{式中 } Q_n' = Q_n/\omega_n, JJ_n(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_n d\mathbf{r}.$$

由上式可以看出 $JJ_n(t)$ 是决定微波腔中微波场变化的关键因素, 是时间 t 的函数, 同电子束在微波腔中的运动有关, 由式(9)可得

$$JJ_n(t) = \frac{e}{\varepsilon} \sum_{k0} \sum_{i0} \sum_{j0=t-T_{ij}}^t \mathbf{v}(t, t_{i0}, \mathbf{v}_{j0}, \mathbf{r}_{k0}) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}(t, t_{i0}, \mathbf{v}_{j0}, \mathbf{r}_{k0})), \quad (12)$$

式中 T_{ij} 是第 i 个电子通过微波腔的渡越时间, 是电子初始状态 $(t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0)$ 和微波场的函数。

由于电子束中的电子数目巨大, 为便于计算处理, 可以将电子束等效为由多个微电子团组成, 每个微电子团中的电子运动一致, 则引入电子密度分布后

$$JJ_n(t) = \frac{e}{\varepsilon} \sum_{k0} \sum_{i0} \sum_{j0=t-T_{ij}}^t \rho(t_{i0}, \mathbf{v}_{j0}, \mathbf{r}_{k0}) \mathbf{v}(t, t_{i0}, \mathbf{v}_{j0}, \mathbf{r}_{k0}) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}(t, t_{i0}, \mathbf{v}_{j0}, \mathbf{r}_{k0})), \quad (13)$$

式中 $\rho(t_{i0}, \mathbf{v}_{j0}, \mathbf{r}_{k0})$ 是电子束进入微波腔时第 i 个微电子团的电荷, $(t_{i0}, \mathbf{v}_{j0}, \mathbf{r}_{k0})$ 为该微电子团进入微波腔的初始时间、初始速度和初始位矢。

同理, 上式也可以表示为积分形式

$$JJ_n(t) = \frac{e}{\varepsilon} \iint_{t-T}^t \int \rho(t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0) \mathbf{v}(t, t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}(t, t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0)) v_0 dt_0 d\mathbf{v}_0 d\mathbf{r}_0, \quad (14)$$

式中 $\rho(t_i, \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{r}_k)$ 是电子束进入微波腔时的电荷密度分布。

由此根据电子束的初始状态 $\rho_0(t_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0)$ 和微波腔的模式 \mathbf{E}_n , 根据方程(7)、(10)和(11), 即可得到微波腔中微波场的变化和电子束的运动过程, 该方程组成一组微波谐振腔中电子束同微波场相互作用的自洽方程组。

在实际微波腔中, 尽管模式很多但不是所有模式对微波腔的工作都有影响; 微波腔通常工作在一个频率上, 而且只有靠近工作频率的模式才有影响, 而那些远离工作频率模式的影响很小。适当设计微波腔可以使微波腔的工作频率尽可能远离其他模式频率, 从而降低或消除其影响, 忽略非工作模式的影响, 且 $\omega_{0n} = \omega_n = \omega$ 时, 电子束同微波场相互作用的自洽方程为

$$\frac{\alpha_n'}{Q_n} - 2\omega\beta_n' \alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} JJ_n'(t') \sin(\omega t' + \beta_n) dt', \quad (15)$$

$$\alpha_n' + \frac{1}{Q_n} \alpha_n = \frac{1}{2\pi\omega} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} JJ_n'(t') \cos(\omega t' + \beta_n) dt', \quad (16)$$

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = e(\alpha_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) e^{j(\omega t + \beta_n)} + \mathbf{E}_0) +$$

$$\frac{e}{c} (\alpha_n \mathbf{v} \times \mathbf{B}_n(\mathbf{r}) e^{j(\omega t + \beta_n - \frac{\pi}{2})} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) + e\mathbf{E}_{sc}, \quad (17)$$

由上式可知,电子束同微波场的作用不仅同微波腔的模式有关,而且同电子束的初始状态有关。微波腔储能 W 决定于 α_n ,由式(3)可得

$$W = \varepsilon \alpha_n^2, \quad (18)$$

由此根据微波腔负载品质因子 $Q_{ex}^{(n)}$ 可以得到微波腔的输出功率为

$$P_{out} = \frac{\omega \varepsilon \alpha_n^2}{Q_{ex}^{(n)}}. \quad (19)$$

2 单间隙谐振腔的工作模式场分布

尽管根据微波腔的模式和初始状态,由方程可以得到电子束在微波腔中的运动和微波场的变化过程,但是该方程组的求解仍然很困难。为了进一步研究电子束同微波场相互作用过程,尤其是非线性过程,在这里只考虑一维情况下单间隙谐振腔(如图1)中电子束同微波场相互作用,具体微波腔参数见表1。

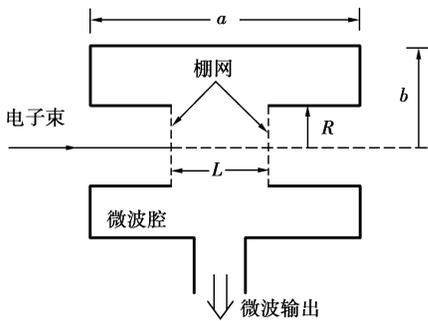


图1 单间隙谐振腔示意图

表1 S波段微波腔模拟参量

参量	腔长 a/cm	外径 b/cm	漂移管 半径 R/cm	作用 长度 L/cm	谐振 频率 f_0/GHz	归一化 间隙场强 $E_0/\text{m}^{-3/2}$
取值	5	3	1.5	3	2.5	2.0

只考虑工作模式时,在作用间隙中微波场分布近似均匀场^[10],即

$$\begin{aligned} E_z(z) &= E_0, E_r(z) = E_\theta(z) = 0, \\ B_z(z) &= B_r(z) = B_\theta(z) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

式中 E_0 为归一化间隙场强,由微波腔的具体结构决定,由式(3)根据微波腔中储能和作用区某一点的场强可以得到,即

$$E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon E^2}{W}}, \quad (21)$$

式中 $W(\text{J})$ 是作用间隙中场强为 $E(\text{V/m})$ 时微波腔中的储能, E_0 单位为 $\text{m}^{-3/2}$ 。

3 束腔互作用

3.1 一维单间隙微波腔的束波互作用关系

由于空间电荷场的作用同电子束的初始调制深度有关,微波场较小,电子束的分布近似为均匀分布时,空间电荷场近似为直流场,对电子束同微波场之间的相互作用影响很小;微波场较大,电子束的分布受到微波场的调制时,微波场远大于空间电荷场,空间电荷场影响仍然很小;为了进一步简化,忽略空间电荷场的作用,则电子在微波腔中的运动方程为

$$\frac{d(mv)}{dt} = e\alpha E_0 \sin(\omega t + \beta), \quad (22)$$

如果电子束是连续、单能、均匀的 ($\rho(t, v) = \rho_0 \delta(v - v_0)$), 则

$$\begin{aligned} JJ_n(t) &= \frac{e^2 \alpha E_0^2}{m \omega^2 \varepsilon} \rho_0 v_0 [\sin(\omega t + \beta) - \sin(\omega t - \omega T + \\ &\beta)] + \frac{e E_0}{\varepsilon} \rho_0 v_0 T \left(v_0 - \frac{e \alpha E_0}{m \omega} \cos(\omega t + \beta) \right), \end{aligned} \quad (23)$$

令 $\chi = \omega t$, 由式(12)、(16)、(18)可得,一维情况下单间隙微波腔的束波互作用关系式

$$\frac{\alpha'}{Q} - 2\beta' \alpha \approx -\eta \alpha [\sin \beta - \sin(\theta - \beta)], \quad (24)$$

$$\alpha' + \frac{\alpha}{Q} \approx \eta \alpha [\cos \beta - \cos(\theta - \beta)], \quad (25)$$

$$\theta \approx k^2 L / (\beta_0 k + E' \cos(\chi + \beta)), \quad (26)$$

式中 $\eta = \frac{I}{I_A} * \frac{E_0^2}{k^3}$ ($I = e \rho_0 v_0$, $I_A = \frac{4\pi \varepsilon m c^3}{e}$ 为 Alphen 电流,约为 17 kA, $k = \omega/c$), $\theta = \omega T$, $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$, $E' = \frac{e \alpha E_0}{m c^2}$ 。

3.2 微波建场过程

当工作电流略大于起振电流时,随着微波腔中微波场的建立,微波场逐渐达到平衡(稳态过程)其作用过程见图2。由于 $E' \ll \beta_0 k$, $\theta \approx kL/\beta_0$ 近似为常数,则

$$\alpha(t) \approx \alpha(0) e^{\eta \int_0^t [\cos \beta - \cos(\theta - \beta)] dt}, \quad (27)$$

当 $\theta = \pi$, 且 $\eta > \frac{1}{2Q}$ 时,微波腔的微波起振;起振时的增益为 $2\eta - \frac{1}{Q}$;该结论同微波小信号线性理论的结论一致^[10],同时微波腔起振流强为

$$I_{st} = I_A \cdot \frac{k^3 v_0}{2QE_0^2}, \quad (28)$$

由式(27)可以看出微波腔的微波起振后,微波增益随时间变化,同起振时的增益不同,其物理过程是非

线性过程(如图2)。图2左图为 $Q=10, \beta_0=0.9, kL=0.9\pi$,当 $I=1.5I_{st}$,时微波建场过程中微波腔中场强随时间的变化曲线。

3.3 非稳态过程

式(24)~(26)描述了一维情况下单间隙微波腔的束波相互作用过程,包含微波建场、辐射场呈指数增长等非稳态作用过程,该过程涉及到电子束同微波作用的线性和非线性过程。图2右图为 $Q=10, \beta_0=0.9, kL=0.9\pi$,当 $I=3.5I_{st}$,时非稳态过程中微波腔中场强随时间的变化曲线。由图2可以看出,当工作电流略远大于起振电流时,微波腔中微波场迅速建立,并达到一个极大值,然后迅速减小,此现象同RBWO(相对论返波管)中的超辐射现象一致^[2]。

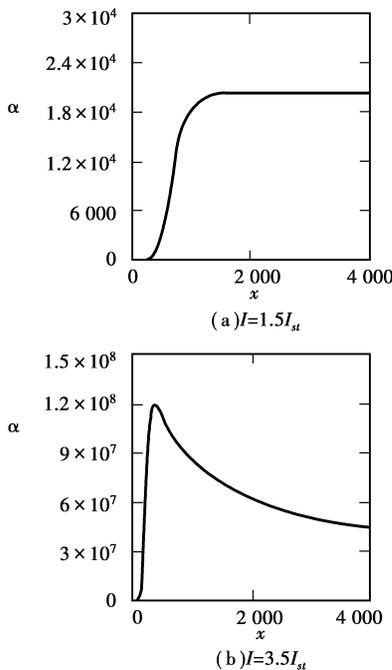


图2 微波建场过程中微波腔中场强(随时间的变化曲线)

4 结论

关于微波腔束波相互作用过程的理论研究有很多种方法,这里从微波腔本征模式出发,给出了一维情况下单间隙微波腔的束波相互作用关系(式(24)-(26)),通过数字计算给出了不同工作电流下微波建场过程中微波腔场强随时间的变化曲线(如图2),由图可以看出,当工作电流远大于起振电流时,微波腔中微波场迅速建立,并达到一个极大值,然后迅速减小,出现了同RBWO中超辐射现象一致的现象。由于单间隙谐振腔要求的起振电流很高,进一步的研究工作可在相应数字模拟软件(如KARTA、MAGIC)上进行,并将此理论应用于多间隙微波腔。

参考文献:

- [1] GUNIN A V, KLIMOV, KOROVIN S D. Pulsewidth limitation in the relative backward oscillator[J]. IEEE Trans. Plasma Sci, 2002, 30(2): 326-330.
- [2] 李正红, 孟凡宝. 两腔高功率微波振荡器研究[J]. 物理学报, 2005, 54(8): 3578-3583.
- [3] 刘胜纲. 微波电子学导论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1985: 77-95.
- [4] 李正红, 胡克松, 张红. 利用场耦合理论研究微波谐振腔[J]. 强激光与粒子束, 2002(14): 99-105.
- [5] 李正红, 黄华, 孟凡宝. 任意时间分布电子束同单间隙微波腔的非线性自洽过程研究[J]. 物理学报, 2005, 54(4): 1564-1571.
- [6] 张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁场理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 1994: 120-161.
- [7] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978: 331-350.
- [8] SLATER J C. Microwave electronics[M]. New York: D. Van Nostrand Press, 2000: 200-211.
- [9] 黄宏嘉. 微波原理[M]. 北京: 科学出版社, 1987: 123-220.
- [10] 王书鸿, 罗紫华, 罗应雄. 质子直线加速器原理[M]. 北京: 原子能出版社, 1980: 230-260.

Unstable Physical Process in A single-ga PRF Cavity with Electron Beam

LIAO Xue, REN Xue-Zao, ZHOU Zi-Gang, XIE Hong-Quan

(Science College, South-western University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621021, P. R. China)

Abstract: The equations about actions between the RF field and electron beam are established based on Maxwell theory and Lorentz force acting on electrons, these equations are also called self-consistent equations for action between microwave and electron beam in RF cavity. Based on the self-consistent equations, the single-ga PRF cavity is one-dimensionally studied, the curves of microwave field versus time are given for different beam currents. It is shown that very high microwave can be generated when the beam current is far beyond the start-up Pcurrent.

Key words: high power microwave; single-ga PRF cavity; super-radiance; unstable physical processes

(编辑 陈移峰)