文章编号:1000-582X(2007)12-0106-05

关于对称芬斯勒度量的若干性质

鲁从银[1],王明风[1],程新跃[2]
(1. 重庆大学 数理学院,重庆 400030;2. 重庆工学院 数理学院,重庆 400050)

摘　要:在 $n(n\geqslant 3)$ 维芬斯勒流形 (M,F) 上,利用芬斯勒几何的基础知识和基本方法得到了对称芬斯勒度量 F(reversible Finsler metric)具有若干很好的曲率性质;并进一步证明了对称 (α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的充分必要条件是 F 为黎曼度量或 Berwald 度量,拓展了沈忠民等人的结果。最后证明了对称芬斯勒度量 F 具有殆迷向 S-曲率时,F 必为弱 Berwald 度量,这时如果 F 还具有标量旗曲率 $K(x,y)$,那么 $K(x,y)$ 必为常数。

关键词:芬斯勒度量;(α,β)-度量;黎曼度量;Berwald 度量;S-曲率;旗曲率
中图分类号:O186　　文献标志码:A

近年来对具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的芬斯勒度量,芬斯勒几何学家们已经做了大量研究工作,得到了一系列富有意义的成果。例如,程新跃和沈忠民在文献[1]中证明了 n 维流形 M 上的 Randers 度量 $F=\alpha+\beta$ 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率等价于 F 具有迷向 S-曲率且 β 为闭的;如果 F 还具有常数旗曲率 K,那么 $K\leqslant 0$ 且 $K=0$ 时 F 是局部 Minkowski 度量。更一般地,程新跃、莫小欢和沈忠民在文献[2]中证明了当芬斯勒度量 F 具有标量旗曲率 $K=K(x,y)$ 且具有相对迷向平均 Landsberg 曲率时,旗曲率 K 和畸变(distortion) $\tau=\tau(x,y)$ 应该满足:

$$\frac{n+1}{3}K_{y^k}+\left(K+c^2(x)-\frac{c_{x^m}y^m}{F}\right)\tau_{y^k}=0。$$

其中 $c=c(x)$ 表示流形 M 上的光滑函数。进一步地,还证明了如果 c 为常数,那么在 M 上必定存在标量函数 $\rho=\rho(x)$,使得

$$K=-c^2+\rho e^{\frac{-3\tau}{n+1}},y\in T_xM\backslash\{0\}。$$

进一步研究了对称的且具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的芬斯勒度量,得到如下定理。

定理 1　设 $F=\alpha\varphi(s)\left(s:=\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ 是 $n(n\geqslant 3)$ 维芬斯勒流形 M 上对称的 (α,β)-度量(即 $F(x,-y)=F(x,y)$),那么 F 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率(即 $J+c(x)FI=0$)的充分必要条件是下列之一成立:

Ⅰ) $\Phi=0$,即 F 为黎曼度量。

Ⅱ) $\Phi\neq 0$ 且 β 关于 α 是平行的,即 F 是 Berwald 度量。

其中 $c=c(x)$ 是流形 M 上的标量函数,Φ 的定义见后页预备知识。

沈忠民在文献[3]中证明了:在 $n(n\geqslant 3)$ 维芬斯勒流形 (M,F) 上,(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 是 Landsberg 度量的充分必要条件下列之一成立:

a) β 关于 α 是平行的,即 F 是 Berwald 度量。

b) β 关于 α 是不平行的,同时 $\varphi=\varphi(s)$ 和 β 分别满足

$$Q=q_0\sqrt{1-\left(\frac{s}{b}\right)^2}+q_1s,r_{ij}=k(b^2a_{ij}-b_ib_j),s_{ij}=0。$$

其中 $b(x):=\|\beta_x\|_\alpha\neq 0$,$q_0$ 和 q_1 都为常数,$k=k(x)$ 是流形 M 上的标量函数,Q 的定义见预备知识。定理 1 正是从对称 (α,β)-度量的角度拓展了该定理。事实上,如果

$$\varphi(-s)=\varphi(s),\ Q=q_0\sqrt{1-\left(\frac{s}{b}\right)^2}+q_1s,$$

那么 (α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 就是黎曼度量。

具有(殆)迷向 S-曲率的芬斯勒度量一直是芬斯勒几何研究的热点之一。沈忠民在文献[4]中证明了

收稿日期:2007-07-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671214);重庆市科委自然科学基金资助项目(CSTC,2006BB8394)。
作者简介:鲁从银(1969-),男,硕士,主要从事微分几何研究。程新跃(联系人),男,教授,(E-mail)chengxy@cqit.edu.cn

如果芬斯勒流形(M,F)是闭的,F 具有负的旗曲率和常数 S-曲率,那么 F 必是黎曼度量。程新跃,莫小欢和沈忠民在文献[2]中完成了对射影平坦且具有迷向 S-曲率的 Randers 度量的分类;证明了 n 维流形上,如果芬斯勒度量 F 具有标量旗曲率 $K=K(x,y)$ 且 S-曲率是殆迷向的(即 $S=(n+1)(cF+\eta)$),那么旗曲率可表示为:

$$K = \frac{3c_{x^m}y^m}{F} + \sigma。\quad (1)$$

其中:$c=c(x)$ 和 $\sigma=\sigma(x)$ 都是流形 M 上的标量函数;$\eta=\eta_i(x)y^i$ 是闭的 1-形式。程新跃和沈忠民在文献[5]中完成了对具有迷向 S-曲率且具有标量旗曲率的 Randers 度量的分类,在文献[6]中完成了对射影平坦且具有迷向 S-曲率的芬斯勒度量的分类。

特别地,关于对称芬斯勒度量的研究也取得了重大突破。C. W. Kim 和 J. W. Yim 在文献[7]中证明了:在闭的芬斯勒流形(M,F)上,如果对称芬斯勒度量 F 具有正常数旗曲率且 S-曲率为零,那么 F 必是黎曼度量。

对于具有殆迷向 S-曲率的对称芬斯勒度量,得到如下定理。

定理 2　设(M,F)是 $n(n\geqslant 3)$ 维芬斯勒流形,如果对称芬斯勒度量 F 具有殆迷向 S-曲率,即 $S=(n+1)(cF+\eta)$,那么

Ⅰ)F 必为弱 Berwald 度量(即 $E_{ij}=0$)。

Ⅱ)当 F 还具有标量旗曲率 K 时,K 必定是常数。

其中 $c=c(x)$ 是流形 M 上的标量函数,$\eta=\eta_i(x)y^i$ 是闭的 1-形式。

1　预备知识

设 M 是 n 维光滑流形,$TM=U_{x\in M}T_xM$ 表示 M 的切丛,T_xM 表示在点 $x\in M$ 处的切空间。用(x,y)表示 TM 中的一个点,其中 $y\in T_xM$。流形 M 上的芬斯勒度量是指具有下列 2 条性质的函数 $F:TM\to[0,\infty)$,

1)F 是定义在 $TM_0:=TM\{0\}$ 上的光滑函数;

2)在每一点 $x\in M$,$F_x:=F|_{T_xM}$ 是 T_xM 上的 Minkowski 范数。

设(x^i,y^i)表示 TM 的标准局部坐标系。对任一个 $y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\neq 0$,定义

$$g_{ij}(x,y):=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j},g^{ij}(x,y):=[g_{ij}(x,y)]^{-1}。$$

根据度量 F 的齐次性可知:

$$F^2(x,y)=g_{ij}(x,y)y^iy^j。$$

在 n 维流形 M 上,设 $\alpha:=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ 是黎曼度量,$\beta:=b_i(x)y^i$ 是 1-形式;$\varphi=\varphi(s)$ 是开集$(-b_0,b_0)$上的光滑函数,且

$$\varphi-s\varphi'+(b^2-s^2)\varphi''>0,\ |s|\leqslant b<b_0。$$

那么 $F=\alpha\varphi(s)$(其中 $s:=\frac{\beta}{\alpha}$ 且 $b(x):=\|\beta_x\|_\alpha<b_0$)在 M 的任一开集上都是一个正定的芬斯勒度量,称之为(α,β)-度量。

如果对任意 $y\in T_xM$ 都有 $F(x,-y)=F(x,y)$,那么称 F 为对称的芬斯勒度量(reversible Finsler metric)。可以证明(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$($s:=\frac{\beta}{\alpha}$)是对称的芬斯勒度量的充分必要条件是 $\varphi(s)$ 为偶函数,即任意 $s\in(-b_0,b_0)$ 都有 $\varphi(-s)=\varphi(s)$。

对于(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$,令

$$Q:=\frac{\varphi'}{\varphi-s\varphi'},\Delta:=1+sQ+(b^2-s^2)Q',\theta:=\frac{Q-sQ'}{2\Delta},$$

$$\Phi:=-(n\Delta+1+sQ)(Q-sQ')-(b^2-s^2)(1+sQ)Q''。$$

芬斯勒度量 F 的测地线 $c=c(t)$ 由下列方程组来确定:

$$\frac{d^2c^i(t)}{dt^2}+2G^i(c(t),\frac{dc(t)}{dt})=0。$$

其中 G^i 称为度量 F 的测地系数。根据文献[8]有

$$G^i:=\frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^ky^l}y^k-[F^2]_{x^l}\}。$$

当 F 是黎曼度量时,

$$g_{ij}(x,y)=g_{ij}(x),G^i(x,y)=\frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^jy^k,$$

这里 $\Gamma^i_{jk}(x)$ 为黎曼度量的 Christoffel 记号。

黎曼曲率 $R_y=R^i_k dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}|_x:T_xM\to T_xM$,是切空间 T_xM 上的一组线性映射,其中

$$R^i_k:=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-y^j\frac{\partial^2G^i}{\partial x^j\partial y^k}+2G^j\frac{\partial^2G^i}{\partial y^j\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}。\quad (2)$$

对旗 $P=\mathrm{span}\{y,u\}\subset T_xM$ 来说,旗曲率

$$K=K(P,y):=\frac{g_y(u,R_y(u))}{g_y(y,y)g_y(u,u)-g^2(y,u)}.$$

当 F 是黎曼度量时,$K=K(P)$ 表示黎曼几何中切平面 P 的截面曲率。如果对任意 $y\in T_xM$,$K=K(x,y)$ 都是 $TM\{0\}$ 上的标量函数(即与切平面 P 无关),那么称 F 具有标量旗曲率。根据定义,芬斯勒度量 F 具有标量旗曲率 $K=K(x,y)$ 当且仅当

$$R^i_k=KF^2h^i_k=K\{F^2\delta^i_k-g_{kq}y^qy^i\}。\quad (3)$$

芬斯勒空间中黎曼几何量刻画了空间的形状,而下面的非黎曼几何量则描绘了空间的色彩。设 $dV_F=\sigma(x)dx^1\cdots dx^n$ 表示芬斯勒度量 F 的体积形式,其中

$$\sigma(x):=\frac{\mathrm{Vol}(B^n(1))}{\mathrm{Vol}\{(y^i)\in R^n \mid F(y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)<1\}}。$$

对非零向量 $y\in T_xM$,定义畸变(distortion)

$$\tau(y):=\ln\left[\frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma(x)}\right]。$$

畸变刻画了芬斯勒度量与黎曼度量的偏离程度,即 F 是黎曼度量当且仅当 $\tau=0$。

Cartan 挠率和平均 Cartan 挠率分别定义如下:

$$\left.\begin{aligned}C_{ijk}(x,y):&=\frac{1}{4}[F^2]_{y^iy^jy^k}(x,y)\\ I_i(x,y):&=g^{jk}(x,y)C_{ijk}(x,y)\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

它们也都刻画芬斯勒度量偏离黎曼度量的程度。平均 Cartan 挠率也等于 T_xM 中畸变 τ 的垂直协变导数,即

$$I_k(x,y)=\frac{\partial\tau}{\partial y^k}=\frac{\partial}{\partial y^k}[\ln\sqrt{\det(g_{ij}(x,y))}]。$$

通过直接计算得到(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 的平均 Cartan 挠率:

$$\begin{aligned}I_i&=\frac{\partial}{\partial y^i}[\ln\sqrt{\det(g_{jk})}]\\&=\frac{\partial}{\partial y^i}\{\frac{n+1}{2}\ln\varphi+\frac{n-2}{2}\ln(\varphi-s\varphi')+\frac{1}{2}\ln[(\varphi-s\varphi')+(b^2-s^2)\varphi'']+\frac{1}{2}\ln[\det(a_{jk}(x)]\}\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial y^i}\{(n+1)\frac{\varphi'}{\varphi}-(n-2)\frac{s\varphi''}{\varphi-s\varphi'}-\frac{3s\varphi''-(b^2-s^2)\varphi'''}{(\varphi-s\varphi')+(b^2-s^2)\varphi''}\}=\frac{\alpha b_i-sy_i}{2\alpha^2}\{(n+1)\frac{\varphi'}{\varphi}\\&\quad-(n-2)\frac{s\varphi''}{\varphi-s\varphi'}-\frac{3s\varphi''-(b^2-s^2)\varphi'''}{(\varphi-s\varphi')+(b^2-s^2)\varphi''}\}\\&=\frac{-\Phi(\varphi-s\varphi')}{2\Delta\varphi\alpha^2}(\alpha b_i-sy_i)。\end{aligned}$$

根据 Deicke 理论,芬斯勒度量为黎曼度量的充分必要条件是其平均 Cartan 挠率为零。显然,(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 为黎曼度量的充分必要条件是 $\Phi=0$.

S-曲率是指畸变 τ 沿测地线 $c=c(t)$ 的水平协变导数,文献[9]算得 S-曲率的表达式

$$S(x,y)=\frac{\partial G^i(x,y)}{\partial y^i}-y^i\frac{\partial\ln\sigma(x)}{\partial x^i}。\qquad(5)$$

如果在流形 M 上存在标量函数 $c=c(x)$ 和闭的1-形式 $\eta=\eta_i(x)y^i$,使得 $S=(n+1)(cF+\eta)$,那么称 F 具有殆迷向 S-曲率;当 $\eta=0$ 时,称 F 具有迷向 S-曲率。

Berwald 曲率和平均 Berwald 曲率分别定义为

$$B^i_{jkl}(x,y):=\frac{\partial^3G^i(x,y)}{\partial y^l\partial y^j\partial y^k},$$

$$E_{ij}:=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}\left(\frac{\partial G^m}{\partial y^m}\right)=\frac{1}{2}B^m_{ijm}。$$

称 Berwald 曲率为零的芬斯勒度量为 Berwald 度量。称平均 Berwald 曲率为零的芬斯勒度量为弱 Berwald 度量。容易看到,Berwald 度量必定是弱 Berwald 度量,反之却不一定成立。平均 Berwald 曲率和 S-曲率之间关系为

$$E_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}S_{y^iy^j}=\frac{1}{2}\frac{\partial^3G^m(x,y)}{\partial y^m\partial y^i\partial y^j}。$$

对(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 来说,如果 β 关于 α 是平行的(即 $s_{00}=0$ 且 $r_{00}=0$),那么容易算得度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 和黎曼度量 α 的测地系数相等,即

$$G^i=G^i=\frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^jy^k。$$

显然 Berwald 曲率 $B^i_{jkl}(x,y)=0$,即 $F=\alpha\varphi(s)$ 是 Berwald 度量。

Landsberg 曲率和平均 Landsberg 曲率分别定义为

$$L_{ijk}:=-\frac{1}{2}y^mg_{ml}\frac{\partial G^l}{\partial y^i\partial y^j\partial y^k}=-\frac{1}{2}y^mg_{ml}B^l_{ijk};$$

$$J_i:=g^{jk}L_{ijk}。$$

如果 Landsberg 曲率为零,那么称 F 为 Landsberg 度量。显然 Berwald 度量一定是 Landsberg 度量,反之则不一定成立。如果弱 Landsberg 曲率为零,那么称 F 为弱 Landsberg 度量。容易看到,Landsberg 度量必定是弱 Landsberg 度量,而反之却不一定成立。如果在流形 M 上存在标量函数 $c=c(x)$ 使得 $J_i+cFI_i=0$,那么称 F 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率。

事实上,平均 Landsberg 曲率表示平均 Cartan 挠率关于度量 F 的水平协变导数,即

$$J_i(x,y)=I_{i;m}y^m=y^j\frac{\partial I_i}{\partial x^j}-I_j\frac{\partial G^j}{\partial y^i}-2G^j\frac{\partial I_i}{\partial y^j}。\qquad(6)$$

李本伶和沈忠民在文献[9]中证明了以下定理。

定理 A[9] 在 $n(n\geqslant3)$ 维芬斯勒流形 (M,F) 上,(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 是弱 Landsberg 度量的充分必要条件下列之一成立:

a) $\Phi=0$,即 F 为黎曼度量。

b) $\Phi\neq0$ 且 β 关于 α 是平行的,即 F 是 Berwald 度量。

c) $\Phi\neq0$ 且 β 关于 α 是不平行的,同时 $\varphi=\varphi(s)$ 和 β 分别满足

$$-\Phi=\frac{\lambda\Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b^2-s^2}},r_{ij}=k(b^2a_{ij}-b_ib_j),s_{ij}=0。$$

其中 $b(x):=\|\beta_x\|_\alpha\neq0$,$\lambda$ 为常数,$k=k(x)$ 是流形 M 上的标量函数。

利用芬斯勒几何的基础知识和基本方法证明了对称芬斯勒度量具有以下曲率性质。

引理 1.1　如果 F 是对称的芬斯勒度量(即 $F(x,-y)=F(x,y)$),I_k,J_k,S,K 分别表示平均 Cartan 挠率,平均 Landsberg 曲率,S-曲率和标量旗曲率,那么

$I_k(x,-y)=-I_k(x,y)$; $J_k(x,-y)=J_k(x,y)$,

$S(x,-y)=-S(x,y)$; $K(x,-y)=K(x,y)$。

证明　由 $F(x,-y)=F(x,y)$ 和有关定义直接验证可得:

$g_{ij}(x,-y)=g_{ij}(x,y)$,$g^{ij}(x,-y)=g^{ij}(x,y)$,

$C_{ijk}(x,-y)=-C_{ijk}(x,y)$,$G^i(x,-y)=G^i(x,y)$。

所以根据式(2)、(3)、(4)、(5)、(6)立即可得:

$I_k(x,-y)=-I_k(x,y)$,$J_k(x,-y)=J_k(x,y)$,$S(x,-y)=-S(x,y)$,

$$R^i_k(x,-y)=R^i_k(x,y), \tag{7}$$

$$R^i_k(x,-y)=K(x,-y)\{F^2\delta^i_k-g_{kq}y^qy^i\}。 \tag{8}$$

由式(7)、(8)可得:

$\{K(x,-y)-K(x,y)\}\{F^2\delta^i_k-g_{kq}y^qy^i\}=0$,

令 $k=i$ 并求和可得:

$(n-1)F^2\{K(x,-y)-K(x,y)\}=0$,

即 $K(x,-y)=K(x,y)$,　证毕。

引理 1.2　设(M,F)是 $n(n\geqslant 3)$ 维芬斯勒流形,芬斯勒度量 F 是对称的(即 $F(x,-y)=F(x,y)$),那么度量 F 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率(即 $J+c(x)FI=0$)的充分必要条件是 F 为弱 Landsberg 度量(即 $J=0$)。

证明　充分性是显然的,故只需证明必要性即可。由题意知

$$J_k(x,y)+c(x)F(x,y)I_k(x,y)=0。 \tag{9}$$

用 $-y$ 替换式(9)中的 y,再利用引理 1.1 和 $F(x,-y)=F(x,y)$ 可得:

$$J_k(x,y)-c(x)F(x,y)I_k(x,y)=0。 \tag{10}$$

由式(9)、(10)易知: $J_k(x,y)=0$。

即 F 为弱 Landsberg 度量。　证毕。

2　定理的证明

定理 1 的证明

根据引理 1.2 易知,对称(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率等同于对称(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 是弱 Landsberg 度量。

根据定理 A 易知,(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 是弱 Landsberg 度量等价于 a)、b)、c)3 者之一。下面证明:就对称(α,β)-度量 $F=\alpha\varphi(s)$ 来说,定理 A 中的情况 c)是不存在的。

由于 $\varphi(-s)=\varphi(s)$,不难验证:

$\Delta(-s)=\Delta(s)$,$\Phi(-s)=-\Phi(s)$。

所以用 $-s$ 替换下面式(11)中的 s 并化简可得

$$-\Phi(s)=\frac{\lambda\Delta^{\frac{3}{2}}(s)}{\sqrt{b^2-s^2}}, \tag{11}$$

$$\Phi(s)=\frac{\lambda\Delta^{\frac{3}{2}}(s)}{\sqrt{b^2-s^2}}, \tag{12}$$

由式(11)、(12)显然可得 $\Phi=0$,这与 c)中的 $\Phi\neq 0$ 矛盾。所以定理 A 中的情况 c)确实是不存在的。证毕。

定理 2 的证明

1)由题意知:

$S(x,y)=(n+1)(c(x)F(x,y)+\eta_i(x)y^i)$

再由引理 1.1 和 $F(x,-y)=F(x,y)$ 可得:

$-S(x,y)=(n+1)(c(x)F(x,y)-\eta_i(x)y^i)$。

容易得到

$$S(x,y)=(n+1)\eta_i(x)y^i。$$

所以度量 F 的平均 Berwald 曲率为

$$E_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}S_{y^iy^j}=0。$$

即 F 为弱 Berwald 度量。

2)根据式(1)可知 F 的旗曲率可表示为

$$K(x,y)=\frac{3c_{x^m}y^m}{F(x,y)}+\sigma(x)。$$

注意到 $F(x,-y)=F(x,y)$,显然有

$$K(x,-y)=-\frac{3c_{x^m}y^m}{F(x,y)}+\sigma(x)。$$

所以立即得出

$$K(x,-y)+K(x,y)=2\sigma(x)。$$

根据引理 1.1 得到

$$K(x,y)=\sigma(x)。$$

又因为(M,F)是 $n(n\geqslant 3)$ 维芬斯勒流形,根据 Schur 定理,旗曲率 K 必定是常数。证毕。

参考文献:

[1] CHENG X, SHEN Z. Randers metrics with special curvature properties[J]. Osaka Journal of Mathematics, 2003(40): 87-101.

[2] CHENG X, MO X, SHEN Z. On the flag curvature of Finsler metrics of scalar curvature[J]. J. of London Math. Soc, 2003, 68(2): 762-780.

[3] SHEN Z. On Landsberg (α,β)-metrics[J]. preprint, 2006.

[4] SHEN Z. Nonpositively curved Finsler manifolds with constant S-curvature[J]. Math. Z., (to appear), 2004.

[5] CHENG X, SHEN Z. Randers metrics of scalar flag curvature[J]. preprint, 2005.

[6] CHENG X, SHEN Z. Projectively flat Finsler metrics with almost isotropic S-curvature[J]. Acta Mathematica Scientia,

2006,26(B2):307-313

[7] KIM C W, YIM J W. Finsler manifolds with positive constant flag curvature[J]. Geom,Dedicata (to appear).

[8] CHERN S S, SHEN Z. Riemannian-Finsler Geometry[M]. Singapore:World Sci., 2005.

[9] LI B, SHEN Z. On a class of weakly Landsberg Metrics [J]. Science in China Series A: Muthematics, 2007, 50 (4): 573-589.

Some Properties of Reversible Finsler Metric

Lu Cong-yin[1], *Wang Ming-feng*[1] *and Cheng Xin-yue*[2]

1. Department of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030,P. R. China;

2. Department of Mathematics and Physics, Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400050, P. R. China.

Abstract: Let (M, F) be an n-dimensional Finsler manifold ($n\geqslant 3$), using Finsler geometric basic knowledge and methods, it is obtained that reversible Finsler metric F is of many good curvature propertoes. It is proved that reversible (α,β)-metric $F=\alpha\varphi(s)$ is of relatively isotropic mean Landsberg curvature if and only if the metric F is either Riemannian or Berwaldian., and it develops the result given by Shen Zhong Ming. Finally, it is obtained that if reversible Finsler metric F is of almost isotropic S-curvature, the metric F must be weak Berwaldian. In this case, if the metric F is of scalar flag curvature$K(x,y)$, then$K(x,y)$ must be a constant.

Key words: Finsler metric; (α,β)-metric; Riemann metric; Berwald metric; S-curvature; flag curvature

(编辑 吕建斌)

(上接第 101 页)

The Method to Determine the Ridge parameter in Generalized Ridge-type Estimator

YAN Yi-peng, *YANG Hu*

(Institute of Statistics,College of Mathematicsl and Physics, Chongqing University,Chongqing 400030,P. R. China)

Abstract: Point estimation of parameters is an important research direction in the theory of linear regression model. The conclusion is generalized on the fact that generalized ridge-type estimator is superior to the generalized least-squares estimator with respect to the mean squared error matrix criterion in terms of the approximate multicollinearity of design matrix and the ellipsoidal constraints on regression coefficient. Some methods to determine ridge parameter in generalized ridge-type estimator are given through linear Minimax estimator and balanced loss function aiming at the fact that the generalized ridge-type estimator is an adaptive non-linear estimator. In addition, an example is also presented to analyze and compare above methods using R software.

Key words: generalized ridge-type estimator; ellipsoidal restriction; ridge parameter; Minimax estimation; balanced loss function

(编辑 张小强)