文章编号:1000-582X(2007)02-0146-03

涉及导函数的整函数的唯一性*

吴 春,李江涛
(重庆大学 数理学院数学系,重庆 400030)

摘 要:用正规族理论证明了:若f为非常数的整函数,k为一正整数,$a,b(\neq a,0)$,d为3个有限复数,如果f和$f^{(k)}$ CM 分担 a,当$f^{(k)}=b$时有$f=b$,且$f-d$的所有零点的重数$\geq k$,则$f\equiv f^{(k)}$.

关键词:整函数; 正规族; 唯一性.
中图分类号:O174.5 **文献标识码**:A

1 引言及主要结果

设f和g为复平面C上的亚纯函数,a为任意复数,再设$f(z)-a$的零点为$z_n(n=1,2\cdots)$. 如果$z_n(n=1,2\cdots)$也是$g(z)-a$的零点(不计重级),则记为$f=a\Rightarrow g=a$. 如果$f=a\Rightarrow g=a$,$g=a\Rightarrow f=a$,则记为$f=a\Leftrightarrow g=a$且称f和g IM 分担a(不计重级);如果$f-a$和$g-a$有相同的零点且重级也相同,则记为$f=a\leftrightarrow g=a$,且称f和g CM 分担a(计重级).

设f为复平面C上的亚纯函数,称f是正规函数,如果存在一正整数M,使得$f^{\#}(z)\leq M$(对任意$z\in C$),这里

$$f^{\#}(z)=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

1977 年,Rubel 和 Yang 在文献[1]证明了:

定理 A 设f为非常数的整函数,a,b为互相判别的有穷复数,如果$f=a\leftrightarrow f'=a$,$f=b\leftrightarrow f'=b$,则$f\equiv f'$.

1979 年,Mues 和 Steinmstz 在文献[2]中改进了定理A,得到了:

定理 B 设f为非常数的整函数,a,b为互相判别的复数,如果$f=a\leftrightarrow f'=a$,$f=b\leftrightarrow f'=b$,则$f\equiv f'$.

最近,李江涛与仪洪勋在文献[3]中将上述结果作了如下改进:

定理 C 设f为非常数的整函数,a,b为二有穷复数,且$b\neq a,0$,如果$f=a\leftrightarrow f'=a$,$f'=b\Rightarrow f=b$,则$f\equiv f'$.

定理 D 设f为非常数的整函数,a,b为二有穷复数,且$b\neq a,0$,如果$f=a\Rightarrow f'=a$,$f=b\leftrightarrow f'=b$,则f必为下列情况之一:

$(i)f\equiv f'$;

$(ii)f=ce^{\frac{b}{b-a}z}+a$,其中$c$为非零常数.

一个很自然的问题是:能否将定理 C 、定理 D 中f'用$f^{(k)}$代替? 笔者研究了上述问题,得到如下结论:

定理 1 设f为非常数的整函数,k为一正整数,$a\neq 0,b(\neq a,0)$,d为3个有限复数,如果$f=a\leftrightarrow f^{(k)}=a$,$f^{(k)}=b\Rightarrow f=b$,且$f-d$的所有零点的重数$\geq k$,则$f\equiv f^{(k)}$.

定理 2 设f为非常数的整函数,k为一正整数,$a,b(\neq a,0)$,d为3个有限复数,如果$f=a\Rightarrow f^{(k)}=a$,$f=b\leftrightarrow f^{(k)}=b$,且$f-d$的所有零点的重级$\geq k$,则$f$必为下列情况之一:

$(i)f\equiv f^{(k)}$;

$(ii)f=c_1e^{n_1z}+c_2e^{n_2z}+\cdots+c_ke^{n_kz}+a$,这里$c_j$为非零常数,$n_j^k=\dfrac{b}{b-a}(j=1,2\cdots k)$.

显然,定理 1 、定理 2 推广了定理 A-D.

2 一些引理

引理 1[4] 正规函数的级至多为2,正规整函数为指数型,其级至多为1.

引理 2[5] 设$f(z)$是一个有限级的非常数整函数,a为一个非零的有限复数,k是一正整数,如果$f=a\leftrightarrow f^{(k)}=a$,则

$$\frac{f^{(k)}-a}{f-a}=c,\text{其中为} c \text{非零常数}.$$

引理 3[6] 区域D上的亚纯函数族Φ是正规的,

* 收稿日期:2006-09-20
作者简介:吴 春(1976-),男,重庆大学硕士研究生,研究方向为值分布理论. 李江涛,男,副教授,博士,电话(Tel.):023-65102521;E-mail:ljt@sdu.edu.cn.

当且仅当对任一个紧子集及 $K\subseteq D$ 及 $\forall f\in\Phi, z\in K$,存在一正常数 M,使得 $f^{\#}(z)\leqslant M$.

引理4[7]　设 Φ 为区域 D 上的全纯函数族,k 为一正整数,$a,b(\neq a,0),d$ 为3个有限复数,如果对 $\forall f\in\Phi, z\in D, f-d$ 的所有零点的重级 $\geqslant k$, $f=a\Rightarrow f^{(k)}=a$, $f^{(k)}=b\Rightarrow f=b$,则 Φ 在 D 上正规.

引理5　(文献[8],引理5.1):设 $a_i(z)$ 为整函数,其级 ρ 有限,$g_i(z)$ 也是整函数,且 $g_i-g_j(i\neq j)$ 为超越函数或为次数不低于 ρ 多项式,如果

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z)e^{g_j(z)} \equiv a_0(z),$$

则 $a_j(z)\equiv 0,(j=0,1,2,\cdots n)$.

引理6[9]　设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,$k(\geqslant 2)$ 为整数,如果0为 f 与 $f^{(k)}$ 的 Picard 例外值,则 $f=e^{Az+B}$ 或 $f=(az+b)^{-n}$,其中 $A(\neq 0),B,a(\neq 0),b$ 为常数.

3　定理的证明

定理1的证明:若 $k=1$,即为定理 C 的结论,以下设 $k\geqslant 2$.

设 $\Phi=\{f(z+\xi):\ \xi\in C\}$,则 Φ 为单位圆盘 $\triangle$ 上的全纯函数族,由假设,对任意函数 $h(z)=f(z+\xi)$,有:

$$h(z)=a\leftrightarrow h^{(k)}(z)=a,$$
$$h^{(k)}(z)=b\Rightarrow h(z)=b,(\text{对任意} z\in\triangle),$$

且 $h-d$ 的零点的重级 $\geqslant k$. 由引理4知 Φ 为 $\triangle$ 上的正规族,再由引理3,对任意紧子集及 $K\subseteq\triangle$ 及 $\forall h\in\Phi$, $z\in K$,存在一常数 M,使得 $h^{\#}(z)\leqslant M$,故对 $\forall\omega\in C$,有 $f^{\#}(\omega)\leqslant M$,由引理1知 f 为级至多是1的整函数. 以下区分两种情形:

情形1:若 $a=0$,由 $f=a\leftrightarrow f^{(k)}=a$ 知0为 f 与 $f^{(k)}$ 的 Picard 例外值,由引理6得 $f=e^{Az+B}$,从而 $f^{(k)}=A^k e^{Az+B}$,其中 $A(\neq 0),B$ 为常数,由 $b\neq 0$ 知存在 z_0,使得 $f^{(k)}(z_0)=b$,再由 $f^{(k)}(z)=b\Rightarrow f(z)=b$ 得 $A^k=1$,所以 $f\equiv f^{(k)}$.

情形2:若 $a\neq 0$,由引理2,知:

$$\frac{f^{(k)}-a}{f-a}=A,(A\neq 0),\tag{1}$$

解方程(1),可得:

$$f(z)=c_1e^{n_1z}+c_2e^{n_2z}+\cdots+c_ke^{n_kz}+a\left(1-\frac{1}{A}\right),$$

其中 c_j,n_j 为非零常数,且 $n_j^k=A, j=1,2\cdots k$,故

$$f^{(k)}(z)=A(c_1e^{n_1z}+c_2e^{n_2z}\cdots+c_ke^{n_kz}),\tag{2}$$

如果 $f^{(k)}(z)\neq b$,注意到 $f^{(k)}(z)$ 为级至多是1的整函数,则 $f^{(k)}=b+e^{Bz}$,故 $A(c_1e^{n_1z}+c_2e^{n_2z}\cdots+c_ke^{n_kz})-e^{Bz}\equiv b$,由引理5即得矛盾. 从而存在 $z_0\in C$,使得

$$f^{(k)}(z_0)=b,\tag{3}$$

又由 $f^{(k)}(z)=b\Rightarrow f(z)=b$,所以

$$f(z_0)=b\tag{4}$$

将(3)(4)式代入(1)并注意到 $b\neq a$ 即得 $A=1$,故 $f\equiv f^{(k)}$.

定理2的证明:由引理4,运用与定理1相同的证明过程,可得:

$$\frac{f^{(k)}-b}{f-b}=A,A\neq 0,\tag{5}$$

故

$$f(z)=c_1e^{n_1z}+c_2e^{n_2z}+\cdots+c_ke^{n_kz}+b\left(1-\frac{1}{A}\right).\tag{6}$$

其中 $n_j^k=A, j=1,2\cdots k$. 以下分两种情况讨论:

如果 $b\left(1-\frac{1}{A}\right)\neq a$,由(6)知,存在 z_0 使得

$$f(z_0)=a\tag{7}$$

由 $f=a\Rightarrow f^{(k)}=a$ 知

$$f^{(k)}(z_0)=a\tag{8}$$

注意到 $a\neq b$, 将(7)(8)代入(5)得:$A=1$,故 $f\equiv f^{(k)}$.

情形2:如果 $b\left(1-\frac{1}{A}\right)=a$,则 $A=\frac{b}{b-a}$,代入(6)得

$$f=c_1e^{n_1z}+c_2e^{n_2z}+\cdots+c_ke^{n_kz}+a$$

其中 $n_j^k=\frac{b}{b-a}, j=1,2\cdots k$.

证毕.

参考文献:

[1] L A RUBLE, C C YANG. Value shared by an entire function and its derivative[M]//Complex analysis, lecture notes in math. Kentucky:Springer,1976:101-103.

[2] E MUES N STEINMETZ, MEROMORPHE FUNKTIONEN. Die mit ihrer ableitung werte teilen[J]. Manuscripta Math. 1979,29:195-206.

[3] JIANG TAO LI, HONG XUN YI. Normal families and uniqueness of entire functions and their derivative[J]. Arch Math, 2006,87:52-59.

[4] J CLUNIE W K HAYMAN. The spherical derivatives of integral and meromorphic functions[J]. Comment Math Hev, 1996,40:117-148.

[5] YANG LIANG ZHONG. Solution of a differential equation and its applications [J]. Kodai Math, 1999,22:458-464.

[6] J SCHIFF. Normal Families[M]. Berlin: Springer-verlag, 1993.

[7] JIANG TAO LI, HONG XUN YI. Normal families and shared values of holomorphic functions[J]. Appl Math J

Chinese Univ Ser B,2006,21(3):335-342.

[8] F GROSS. Factorization of Meromorphic Functions[M]. Washington: Naval Research Lab,1972.

[9] FRANK G. Eine vermutung von Hayman uber nullstellen meromorpher funktion[J]. Math Z,1976,149:29-36.

Uniqueness of Entire Functions with Their Derivatives

WU Chun, LI Jiang-tao

(*College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing* 400030, *China*)

Abstract: The anthors use the theory of normal families to prove: Let k be a positive integer, and let $a, b(\neq a, 0), d$ be three finite complex mumbers. If f and $f^{(k)}$ share a CM, $f=b$ whenever $f^{(k)}=b$, and all zeros of $f-d$ have multiplicity at least k, then $f\equiv f^{(k)}$.

Key words: entire function; normality; uniqueness.

(编辑 张小强)

(上接第 138 页)

Asymptotic Attractors of the Nonlinear Evolution Equation in Bounded Domain

ZHAO Lei-na[1], *ZHANG Xing-you*[1,2], *XING Ting-li*

(1. College of Mathematics and physis, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Institute of Fundamental Sciences, Massey University, Palmerston North, New Zealand)

Abstract: The basic principle of infinite-dimensional dynamic system is to try to reduce the original infinite-dimensional system to an infinite-dimensional system. However, due to the unknown structure of the reduced system, it is difficult to describe its dynamical behaviour. To overcome this difficulty, the idea of approximate inertial manifolds is introduced, for NSE, the existence of AIM was studied, it is shown that the global attractor lies within a neighborhood of the graph of an Lipschitz function by the squeezing property. In this paper, by constructing a finite dimensional solution sequence, we will prove that it tends to the global attractor, theoretically, this provides a metod of constructing the asymptotic attractors, theoretically, this provides a method of constructing the asymptotic attractors for the evolution equations.

Key words: nonlinear evolution equation; global attractor; asymptotic attractors

(编辑 陈移峰)