

文章编号:1000-582X(2007)04-0079-04

由小波滤波器系数求尺度函数和小波函数*

韩亮, 田逢春, 王宇

(重庆大学通信工程学院, 重庆 400030)

摘要:为更好地将离散小波变换和连续小波变换联系起来,在分析了现有的由小波滤波器积法求尺度函数和小波函数的方法的基础上,提出了对迭代卷积法的一种改进算法,同时给出了迭代卷积法的收敛判定方法,并分析了改进后算法的优势.实验结果表明该算法是有效的.

关键词:小波滤波器系数;尺度函数;小波函数

中图分类号:TP301.6

文献标志码:A

离散小波变换中滤波器系数 h_n 、 g_n 是主要参数,而连续小波变换中尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 是主要参数.在构造正交小波或双正交小波时^[1-2],通常是利用正交条件、双通道滤波器组精确重建条件、二尺度方程、对称性条件与消失矩条件等条件构造一个不定方程,并在一定假设前提下解出尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 所对应的低通滤波器 h_n 和高通滤波器 g_n .

为了更好地应用小波进行信号处理,我们将两套参数更紧密地联系起来,由二尺度方程可以很容易地由连续小波变换中的尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 求出离散小波变换中的滤波器系数 h_n 、 g_n ^[3];文中讨论的是如何由滤波器系数 h_n 、 g_n 求出尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$.

1 尺度函数与小波函数值的计算

大多数情况下尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 都难以求得解析解,所以通常需要通过一定的方法利用滤波器系数来求出尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的离散逼近值.由滤波器系数 h_n 、 g_n 求尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的主要的方法有傅立叶变换法,矩阵方程法和迭代卷积法3种.

只要得到尺度函数,利用二尺度方程,相应的小波函数就可以由尺度函数求出.

1.1 傅立叶变换法

首先定义小波滤波器系数的傅立叶变换:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-jn\omega}, \quad (1)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-jn\omega}. \quad (2)$$

由小波的基本性质和二尺度方程,可以推导出小波尺度函数和小波函数的傅立叶变换与滤波器系数的傅立叶变换之间的关系的公式:^[1-2]

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega), \quad (3)$$

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{j=2}^{\infty} H(2^{-j}\omega). \quad (4)$$

先由式(3)和式(4)求出 $\Phi(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$ 后,然后再由傅立叶逆变换可以求出尺度函数

遗憾的是,一般情况下由式(3)和式(4)很难推出 $\Phi(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$ 的显示表达式,因此也就无法对 $\Phi(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$ 作傅里叶逆变换以求出尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$,所以这种方法的应用具有很大的局限性.

1.2 矩阵方程法

参考文献[4-5]对矩阵方程法作了叙述,矩阵方程法的主要思路是:

为了求出小波函数在任意点的值,定义向量

* 收稿日期:2006-12-31

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60472037)

作者简介:韩亮(1975-),男,重庆大学讲师、博士研究生,主要研究方向为信号处理、图像编码. E-mail:hanliangaa@yahoo.com.cn.

田逢春,男,教授、博士生导师,(Tel.):023-65106498;E-mail:tfc@ccee.cqu.edu.cn.

$V(t) \in R^N, t \in (0, 1)$ 为:

$$V_j(t) = \phi(t+j-1), j = 1, \dots, N \quad (5)$$

再定义两个 $N \times N$ 矩阵 T_0, T_1 分别为:

$$(T_0)_{ij} = h_{2i-j-1} \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

$$(T_1)_{ij} = h_{2i-j} \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

若 $t = 0, d_1 d_2 \dots d_m$, 则可由双尺度方程递推得

$$v(t) = T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} v(0). \quad (8)$$

该方法有如下优点:

1) 可以得到任意分点上的任意精度的 $\phi(t)$ 的值, 不受通常方法的二进制分点的限制, 因而使用起来十分灵活.

2) 在编程过程中, 数组大小固定为 $N \times N$ 阶, 不随计算精度的提高而增大, 节省存储空间, 适合在计算机上运行.

但是, 该方法一次只能求出尺度函数 $\phi(t)$ 的 N 个 2^{-j} 精度的点的值, 用该方法来计算整个尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 显得太繁琐 (需要使用 2^j 次该方法才能得到全部尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的 2^{-j} 精度的点的值), 这在 j 较大时显得不实用. 通常情况下可以先用矩阵方程法求出尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 若干精确的点, 然后再采用插值的方法得到尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$.

1.3 迭代卷积法

参考文献[6]提出了迭代卷积法, 下面以通过 h_n 求尺度函数为例描述该方法的基本步骤:

1) 假定 $H(z)$ 对应的冲激响应是 $h(n)$, 则 $H(z^2)$ 对应的是 $h(n)$ 的系数之间插入一个零, 记为 $h_{(1)}(n)$; $H(z^4)$ 对应的是 $h(n)$ 的系数之间插入 3 个零, 记为 $h_{(2)}(n)$; 以此类推, $H(z^{2^l})$ 对应的是 $h(n)$ 的系数间插入 $2^l - 1$ 个零, 记为 $h_{(l)}(n)$.

当 $l=1$ 时, $H^{(1)}(z) = H(z)H(z^2), h^{(1)}(n) = h(n) * h_{(1)}(n)$;

当 $l=2$ 时, $H^{(2)}(z) = H^{(1)}(z)H(z^4), h^{(2)}(n) = h^{(1)}(n) * h_{(2)}(n)$;

.....

当 $l=k$ 时, $H^{(k)}(z) = H^{(k-1)}(z)H(z^{2^k}), h^{(k)}(n) = h^{(k-1)}(n) * h_{(k-1)}(n)$.

2) 把 $h^l(n)$ 连成一条曲线, 再把曲线的基底压回 $0 \sim L-1$ 内 (L 为滤波器 h_n 的长度), 注意进行归一化工作, 这样就构成一个尺度函数 $\phi(t)$ 的近似值 $\phi^{(l)}(t)$.

3) 当 $l \rightarrow \infty$ 时, 如果满足正规性条件, $\phi^{(l)}(t)$ 就趋近于连续函数 $\phi(t)$.

4) 利用二尺度方程, 相应的小波函数 $\psi(t)$ 就可以

由尺度函数 $\phi(t)$ 求出.

2 对迭代卷积法的改进

2.1 对迭代卷积法的改进算法

通过研究, 发现对卷积结果插值比对滤波器系数插值的性能更好, 其基本步骤如下 (以通过 h_n 求尺度函数为例):

1) 假定 $H(z)$ 对应的冲激响应是 $h(n)$, $H^{(1)}(z)$ 对应的是 $h^{(1)}(n)$, 则 $H^{(1)}(z^2)$ 对应的是 $h^{(1)}(n)$ 系数之间插入一个零, 记为 $h_{(1)}^{(1)}(n)$; $H^{(2)}(z)$ 对应的是 $h^{(2)}(n)$, 则 $H^{(2)}(z^2)$ 对应的是 $h^{(2)}(n)$ 系数之间插入一个零, 记为 $h_{(1)}^{(2)}(n)$; 以此类推, $H^{(l)}(z)$ 对应的是 $h^{(l)}(n)$, $H^{(l)}(z^2)$ 对应的是 $h^{(l)}(n)$ 系数间插入一个零, 记为 $h_{(1)}^{(l)}(n)$.

当 $l=1$ 时, $H^{(1)}(z) = H(z)H(z^2), h^{(1)}(n) = h(n) * h_{(1)}(n)$;

$$\begin{aligned} \text{当 } l=2 \text{ 时, } H^{(2)}(z) &= H^{(1)}(z)H(z^4) = \\ &= H(z)H(z^2)H(z^4) = \\ &= H(z)H^{(1)}(z^2), \\ h^{(2)}(n) &= h_{(1)}^{(1)}(n) * h(n), \\ &\dots \end{aligned}$$

当 $l=k$ 时,

$$\begin{aligned} H^{(k)}(z) &= H^{(k-1)}(z)H(z^{2^k}) = \\ &= H(z)H^{(k-1)}(z^2), \\ h^{(k)}(n) &= h_{(1)}^{(k-1)}(n) * h(n). \end{aligned}$$

步骤 2)3)4) 与节 1.3 的方法相同. 具体实验结果见节 3.1.

2.2 尺度函数和小波函数的支集长度

对于正交小波而言^[7], 如果滤波器系数 h_n, g_n 不为零的个数 N_h 和 N_g 是有限的 (FIR 滤波器), 那么所对应的尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 则是紧支的. $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的支集长度均为 $N_h - 1$.

对于双正交小波而言^[7], 如果滤波器系数 $h_n, g_n, \tilde{h}_n, \tilde{g}_n$ 不为零的个数 $N_h, N_g, \tilde{N}_h, \tilde{N}_g$ 是有限的 (FIR 滤波器), 那么所对应的尺度函数 $\phi(t), \tilde{\phi}(t)$ 和小波函数 $\psi(t), \tilde{\psi}(t)$ 则是紧支的. $\phi(t)$ 的支集长度为 $N_h - 1$, $\tilde{\phi}(t)$ 的支集长度为 $\tilde{N}_h - 1$, $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ 的支集长度均为 $\frac{N_h + \tilde{N}_h}{2} - 1$.

2.3 收敛的判定方法

在理论上讲, 当迭代次数 $l \rightarrow \infty$ 时, $\phi^l(n)$ 收敛于 $\phi(t)$; 但在实际计算中, 不可能卷积无限多次, 而只能用有限次卷积去逼近. 因此应该有一个收敛的判定方法.

假定计算已经收敛,则输入、输出函数的波形应该是一致的. 判定收敛的方法是: 将前一次的结果 $\phi^{j-1}(n)$ 插值,使其维数与 $\phi^j(n)$ 相同,比较相邻两次 ($\phi^{j-1}(n)$ 的插值与 $\phi^j(n)$) 的值,如果它们的差异小于某个门限,就可以近似认为迭代卷积的结果已经收敛, $\phi^{j-1}(n)$ 与 $\phi^j(n)$ 的形状大致相同. 实际工作中,迭代次数不需要很高,过程便基本收敛. 一般情况下只需要迭代卷积 10 次左右,过程便基本收敛. 具体实验结果见节 4.2.

2.4 对迭代卷积法的性能分析

2.4.1 迭代次数 l 与 $\phi^l(n)$ 的点数的关系

设滤波器 h_n 的长度为 L ,则对应的 $\phi(t)$ 支集长度为 $L-1$,迭代次数 l 与 $\phi^l(n)$ 的点数关系为 $(2^l - 1)(L - 1) + 1$,用数学归纳法证明如下:

① $l=2$ 时, $\phi^l(n)$ 的点数为

$$L + (2^1 \times L - (2^1 - 1)) - 1 = (2^2 - 1)(L - 1) + 1.$$

② 设 $l=k$ 时, $\phi^k(n)$ 的点数为 $(2^k - 1)(L - 1) + 1$; 当 $l=k+1$ 时, $\phi^k(n)$ 的点数为

$$(2((2^k - 1)(L - 1) + 1) - 1) + L - 1 = (2^{k+1} - 1)(L - 1) + 1.$$

③ 综上所述,当迭代次数为 l 次时, $\phi^l(n)$ 的点数为

$$(2^l - 1)(L - 1) + 1. \quad (9)$$

由此可知,使用该方法只需要迭代卷积 l 次就可以得到尺度函数 $\phi(t)$ 的 $(2^l - 1)(L - 1) + 1$ 个采样点 $\phi^l(n)$,其计算效率明显高于节 1.2 提出的方法.

2.4.2 两种迭代卷积法性能的比较

迭代卷积法主要的计算工作量在卷积这一个步骤,而卷积的主要计算量是乘法,下面对 1.3 和 2.1 提出的两种算法进行详细分析.

1) 由 1.3 描述的“对滤波器系数插值”的算法可知,该算法在进行第 N 次迭代卷积时,进行迭代的两个数字信号的长度分别为 $P = (2^N - 1)(L - 1) + 1$ 和 $Q = 2^N L - 2^N + 1$,所需要的计算量主要是 $(P + Q - 1) \times P (P < Q)$ 次乘法,其时间复杂度为 $O(2^{2N} L^2)$,由于滤波器 h_n 的长度 L 为一常数,则时间复杂度可以改写为 $O(2^{2N})$.

2) 由节 2.1 描述的“对卷积结果插值”的算法可知,该算法在进行第 N 次迭代卷积时,进行迭代的两个数字信号的长度分别为 $P = 2((2^N - 1)(L - 1) + 1) - 1$ 和 $Q = L$,所需要的计算量主要是 $(P + Q - 1) \times Q (P > Q)$ 次乘法,其时间复杂度为 $O(2^{N+1} L^2)$,由于滤波器 h_n 的长度 L 为一常数,则时间复杂度可以改写为

$O(2^{N+1})$,比前一算法明显降低.

3 迭代卷积法实验结果

3.1 由迭代卷积法计算尺度函数和小波函数

以 Daubechies97 小波为例,采用节 2.1 提出的改进后的迭代卷积法计算尺度函数和小波函数. 迭代 10 次的结果如图 1 所示,迭代 12 次的结果如图 2 所示:

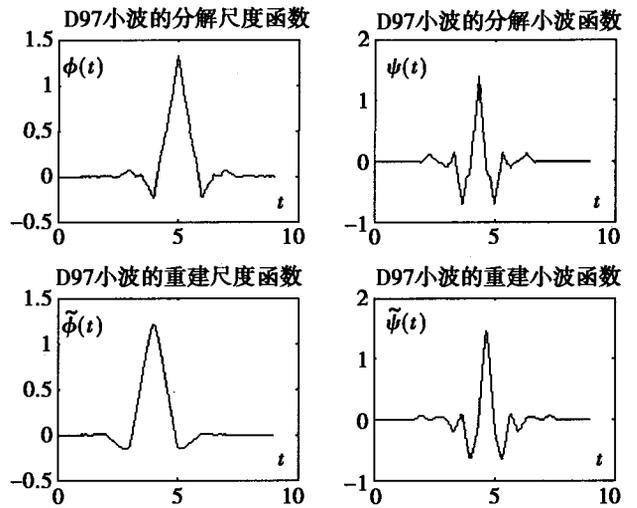


图 1 迭代 10 次的 D97 分解及重建的尺度函数和小波函数

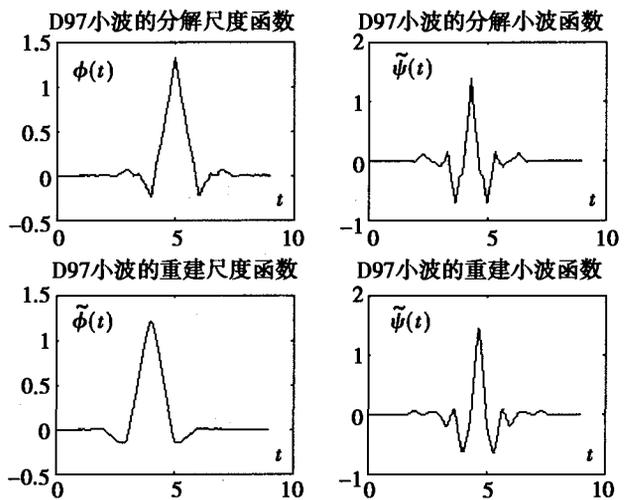


图 2 迭代 12 次的 D97 分解及重建的尺度函数和小波函数

由上可以看出,迭代 12 次与迭代 10 次的结果相差无几. 改进后的迭代卷积算法是可行的.

3.2 迭代次数与相邻两次之间的信噪比

以 Daubechies97 为例,由于可以通过尺度函数计算小波函数,所以只比较分解和重建尺度函数的迭代次数与相邻两次之间的信噪比的关系,其结果见表 1. (注:表 1 中的 PSNR 为该次迭代与前一次迭代比较得出的结果)

由表 1 可以看出:

1) 随迭代次数的增加,尺度函数相邻两次迭代的

表 1

迭代次数	分解尺度函数相邻两次迭代的 PSNR	重建尺度函数相邻两次迭代的 PSNR
5	41.52	43.37
6	47.60	49.58
7	53.65	55.69
8	59.68	61.76
9	65.70	67.80
10	71.72	73.84
12	83.76	85.89

表 1: D97 小波的尺度函数迭代次数与相邻两次之间的信噪比的关系表

PSNR 提高, 说明尺度函数形状随迭代次数增加越来越一致;

2) 当迭代次数大于 10 次时, D97 小波的尺度函数相邻两次迭代的 PSNR 已大于 70 dB, 说明实际工作中需要的迭代次数不会太高, 一般 7、8 次就可以满足要求。

4 结 论

笔者介绍的方法不仅可以用来求满足多分辨率分析的尺度函数和小波函数, 也可以用来计算任意的满足双尺度方程的函数. 它可以广泛地应用于样条理论、

光滑函数生成、数据压缩及解压缩等等, 因此, 对该算法的研究是非常有意义的。

该方法为连续小波变换的应用打下了良好的基础。

参考文献:

- [1] I DAUBECHIES. Orthonormal bases of compactly supported wavelet[J]. *Comm On Pure and Appl Math*, 1988, 41: 909-996.
- [2] A COHEN, I DAUBECHIES, J FEAUVEAU. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets[J]. *Comm On Pure and Appl Math*, 1992, 45: 485-560.
- [3] MARTIN VETTERLI, CORMAC HERLEY. Wavelets and Filter Banks: Theory and Design[J]. *IEEE Tran On Signal Proc*, 1992, 40 (9): 2207-2232.
- [4] G · STRANG, T · NGUYEN. Wavelets and Filter Banks [M]. Boston: Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [5] 张平文, 刘法启, 张宇. 小波函数值的计算[J]. *计算数学*, 1995(2): 173-185.
- [6] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [7] Mallat. 信号处理的小波导引[M]. 杨力华译. 北京: 机械工业出版社, 2002.

Computation of the Wavelet and Scaling Functions Using Coefficients of Wavelet Filter

HAN Liang, TIAN Feng-chun, WANG Yu

(College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: To associate the discrete wavelet transform with the continuous wavelet transform, an improved algorithm on iterative convolution algorithm is given by analyzing the usually used methods of the computation of the wavelet function and scaling function using coefficients of wavelet filter. The way of judging the convergence of iterative convolution is given. The advantages of improved algorithm is analyzed. The experimental result shows that the modified algorithm is effective.

Key words: coefficients of wavelet filter; scaling function; wavelet function

(编辑 张小强)