文章编号:1000-582X(2007)06-0134-03

上半连续集值 1 - 集压缩映射的正不动点

魏曙光,王开荣,何光辉,张　谋
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘　要:利用上半连续集值 1 - 集压缩映射的拓扑度以及上半连续集值 1 - 集压缩映射的不动点定理,研究它在锥中的情形,即研究上半连续集值 1 - 集压缩映射正不动点存在的边界条件。对上半连续集值 1 - 集压缩映射的不动点定理在锥中进行了自然的推广,也是对单值 1 - 集压缩映射的正不动点定理进行的一个自然的延伸。

关键词:集值 1 - 集压缩映射;正不动点;锥;Banach 空间;上半连续;半紧
中图分类号:O177　　**文献标志码**:A

1　预备知识

X 为实 Banach 空间,2^X 表 X 的非空子集族,设 $\Omega\subset X$是有界集,Ω 的集非紧致度定义为

$$\alpha(\Omega)=\inf\left\{d>0,\Omega\text{被有限个直径不大于 } d \text{ 的集合所覆盖}\right\}。$$

定义 1　D 为 X 的有界子集,称 $T:\overline{D}\subset X\to 2^X$ 为集值 K - 集压缩映射,若 T 有界,且 $\alpha(T(\Omega))\leqslant K\alpha(\Omega)$,对于任意有界集 $\Omega\subset D$。(注:$T(\Omega)=\bigcup\limits_{x\in\Omega}Tx$)。

若 $T:\overline{D}\subset X\to 2^X$ 为上半连续集值 K - 集压缩映射($K\in[0,1]$),由 文献[1-2],若对任意 $x\in\partial D$,$0\notin(I-T)(x)$,则可定义 T 在 D 上的不动点指数 $D(I-T,D,0)$,它有下述的性质

(D_1) 若 $D(I-T,D,0)\neq 0$,则 T 在 D 中有一不动点。

(D_2)若 $0\in D$,则 $D(I,D,0)=1$.

(D_3)若 W_1 和 W_2 是 D 中不相交的开集,且对一切 $x\in\overline{D}/(W_1\cup W_2)$,$0\notin(I-T)(x)$,则

$$D(I-T,D,0)=D(I-T,W_1,0)+D(I-T,W_2,0)。$$

(D_4)若 $H:[0,1]\times\overline{D}\to 2^X$ 上半连续,且有

$\alpha(H([0,1]\times\Omega))\leqslant K\alpha(\Omega)$,对于任意 $\Omega\subset\overline{D}$,$\alpha(\Omega)\neq 0$且 $0\notin(I-H)(t,x)$,对于任意 $x\in\partial D$,$t\in[0,1]$则

$$D(I-H(1,\cdot),D,0)=D(I-H(0,\cdot),D,0)。$$

定义 2　称 $T:D\to K(D)$是半紧的,如果只要当$\{x_n\}\subset D$ 是有界的,$\{d(x_n,Tx_n)\}$收敛,那么$\{x_n\}$存在收敛的子列。

(注:这里 $K(D)$表 D 的紧凸集全体,D 为 X 的任意子集,若 A 为一个集合,$d(x,A)=\inf\limits_{y\in A}d(x,y)$[3-4])。

定义 3　$T:D\subset X\to 2^X$ 称为上半连续的,若对任意 $x\in D$,Tx 紧凸。且对于任意 $x_0\in D$ 和使 $Tx_0\subset V$ 成立的开集 V,都存在一个开集 W,$x_0\in W$,使得 $T(y)\subset V$,对于任意 $y\in W\cap D$[5]。

K 为 X 的一个锥,D 为 X 中的一个有界开集,$0\in D$,$\overline{D_k}$和∂D_k 分别表示 $D_k=D\cap K$ 在 K 中的闭包和边界。

由文献[6]知对 X 中任何锥 K,其拟正规常数 $\sigma=\sigma(K)=\sup\{\sigma(y):y\in k^0\}\in[\frac{1}{2},1]$,其中 $k^0=k\setminus\{0\}$。$\sigma(y)=\inf\{\frac{\|x+y\|}{\|x\|}:x\in k^0\}$,且 $\|x+ly\|=l\|\frac{x}{l}+y\|\geqslant l\sigma(y)\|\frac{x}{l}\|=\sigma(y)\|x\|$,$\forall l>0$。

2　正不动点存在的边界条件

定理 1　设 D 是 X 中有界开集,$0\in D$,$T:\overline{D_k}\to 2^k$ 是上半连续的 1 - 集压缩映射,若 $\delta>\frac{d}{\sigma}$,其中 $\delta=$

收稿日期:2007-01-22。
作者简介:魏曙光(1966-),男,重庆大学讲师,博士研究生,主要从事非线性泛函研究(Tel)023-65121871;
(E-mail)wsg757575@sina.com。

$\inf\{\|v\|: v\in Tx, x\in\partial D_k\}$, $d=\sup\{\|x\|, x\in\partial D_k\}$

则 $D(I-T,D_k 0)=0$。

证 由 $\delta>\frac{d}{\sigma}$,知存在 $\varepsilon,\varepsilon_1>0$,使得 $\delta>\frac{d}{\sigma-\varepsilon_1}(1+\varepsilon)$,由 σ 的定义知存在 $y_1\in K^0$,使得 $\|x+y_1\|>(\sigma-\varepsilon_1)\|x\|$, $\forall x\in K^0$ 作映射 $H:\overline{D}_k\times[0,1]\to 2^k$,

$H(x,t)=Tx+tm\,y_1$, $\forall t\in[0,1], x\in\overline{D}_k$。

其中 m 为充分大正数,则 H 是上半连续集值 1 - 集压缩映射,且有 $x\notin H(x,t)$, $\forall(x,t)\in\partial D_k\times[0,1]$

否则存在 $x_1\in\partial D_k$, $t_0\in[0,1]$, $v\in Tx_1$,使得:

$$x_1=v+t_0my_1.$$

则有:

$$d\geqslant\|x_1\|=\|v+t_0my_1\|>$$
$$(\sigma-\varepsilon_1)\|v\|\geqslant(\sigma-\varepsilon_1)\delta>$$
$$(\sigma-\varepsilon_1)\frac{d}{\sigma-\varepsilon_1}(1+\varepsilon)=(1+\varepsilon)d。\quad 矛盾$$

由上半连续集值 1 - 集压缩映射不动点指数性质有

$$D(I-T,D_k,0)=D(I-T-my_1,D_k 0),$$

因为 T 上半连续,所以 Tx 紧凸, Tx 当然有界。

又 D 是有界的,所以对充分大 m,有 $D(I-T-my_1,D_k,0)=0$,

所以 $D(I-T,D_k,0)=0$ 得证。

由文献[2]有下面引理。

引理 1 X 为 Banach 空间, $D\subset X$ 有界开,映射 T: $\overline{D}\to 2^X\backslash\phi$ 为上半连续半紧集值 1 - 集压缩映射, $x_0+\lambda(x-x_0)\notin Tx$,对于任意 $x\in\partial D,\lambda>1$,其中 $x_0\in D$,那么 T 在 $\overline{D}$ 至少存在一个不动点。

不难证明此引理在 $T:\overline{D_k}\to 2^k$ 时同样成立。

引理 2 $T:\overline{D}\subset X\to 2^X$ 为上半连续的半紧集值 1 - 集压缩映象,若 $D(I-T,D,0)\neq 0$,则 T 在 $\overline{D}$ 存在不动点。

则由引理 1、引理 2、定理 1, 产生下面的结论:

定理 2 设 D^1 和 D^2 是 X 中有界开子集, $0\in D^1$, $\overline{D^1}\subset D^2$, $T:\overline{D_k^2}\to 2^k$ 是上半连续的半紧 1 - 集压缩映射, $d_1=\sup\{\|x\|, x\in\partial D_k^1\}$, $d_2=\sup\{\|x\|, x\in\partial D_k^2\}$,若下列条件之一成立:

(H_1) $\delta_2:=\inf\{\|v\|: v\in Tx, x\in\partial D_k^2\}>\frac{d_2}{\sigma}$;

$\lambda x\notin Tx, \forall x\in\partial D_k^1, \lambda>1$,

(H_2) $\delta_1=\inf\{\|v\|: v\in Tx, x\in\partial D_k^1\}>\frac{d_1}{\sigma}$;

$\lambda x\notin Tx, \forall x\in\partial D_k^2, \lambda>1$,

那么 T 在 $\overline{D_k^2}\backslash D_k^1$ 至少有一个不动点。

证 假设条件 (H_1) 成立(条件 (H_2) 成立时证明类似),不失一般性,可以假定 T 在 ∂D_k^2 和 ∂D_k^1 上没有不动点。

由条件 (H_1) 的第一部分,根据定理 1,有

$$D(I-T,D_k^2,0)=0,$$

同时由 (H_1) 的第二部分,根据引理 1,有

$$D(I-T,D_k^1,0)=1,$$

所以由不动点指数性质 (D_3) 有

$$D(I-T,D_k^2\backslash\overline{D_k^1},0)=$$
$$D(I-T,D_k^2,0)-D(I-T,D_k^1,0)=-1\neq 0。$$

由引理 2, T 在 $\overline{D_k^2}\backslash D_k^1$ 上有不动点。得证。

引理 3 若 K 为 X 的有界锥, $T:K\to 2^k$ 为上半连续的 K - 集压缩映射($K\in[0,1)$),则 T 在 K 上存在着不动点。(见[7])

简单地推论可以得到:

定理 3 若 K 为 X 的有界锥, $T:K\to 2^k$ 为上半连续的半紧 1 - 集压缩映射,则 T 在 K 上存在着不动点。

定理 4 X 为实 Banach 空间, K 为 X 的非空有界锥, $T:K\to 2^k$ 为上半连续的半紧 1 - 集压缩映射,若存在有界开集 $D^1,D^2, 0\in D^1, \overline{D^1}\subset D^2$,使得定理 2 的条件 (H_1) 满足,则 T 在 K^0 中至少存在两个不动点。

证 由定理 2 的证明可知:

$$D(I-T,D_k^2\backslash\overline{D_k^1},0)=-1,$$

所以 T 在 $\overline{D_k^2}\backslash D_k^1\subset K^0$ 上有不动点。

又由定理 1, $D(I-T,D_k^2,0)=0$。

由定理 3 和不动点指数性质

$$D(I-T,K\backslash\overline{D_k^2},0)=D(I-T,K,0)-$$
$$D(I-T,D_k^2,0)=1-0=1\neq 0,$$

所以 T 在 $K\backslash\overline{D_k^2}\subset K^0$ 中又有不动点。得证。

3 结束语

在非线性泛函分析的研究中,单值映射只是集值映射的特殊情形,研究集值映射将更具有重要性和普遍性。对于不动点问题,关于集值 K - 集压缩映射 ($K\in[0,1)$) 已经有了许多成熟的结果,但关于集值 1 - 集压缩映射的不动点问题目前结果还很少。笔者利用了文献[1]中得出的上半连续集值 1 - 集压缩映射的拓扑度,对文献[2]中的上半连续集值 1 - 集压缩映射的不动点定理在锥中进行了自然的推广,研究了上半连续集值 1 - 集压缩映射正不动点存在的边界条件。

参考文献:

[1] 魏曙光,张谋.集值映射拓扑度的延拓定理[J].重庆大学学报:自然科学版,2004,27(6):104-106.

[2] 魏曙光,张谋.上半连续集值1-集压缩映射的不动点定理[J].重庆大学学报:自然科学版,2004,27(9):64-66.

[3] 刘威九.半紧1-集压缩集值映射的不动点定理[J].四川师范大学学报,1987,1:99-104.

[4] 张庆雍.半紧1-集压缩的不动点指数和不动点定理[J].数学年刊,1984,5A(1):91-98.

[5] 朱继生.集值映射的连续性[J].数学年刊,1984,5A(6):733-737.

[6] DANCER,NUSSBAUM E N,STUART R D,et al. Quasinormal cones in Banch spaces[J]. Nonlinear Anal Appl 1983,7:539-553.

[7] 孔文波,丁协平.多值K-集压缩映射正不动点存在的边界条件[J].数学研究和评论,1992,12(2):207-212.

Positive Fixed Points for Upper Semicontinuous Set-valued 1-set-contractive Mapping

WEI Shu-guang, WANG Kai-rong, HE Guang-hui, ZHANG Mou

(Collage of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Using topological degree for upper semicontinuous set-valued 1-set-contractive mapping and the fixed point theorems for upper semicontinuous set-valued 1-set-contractive mapping, the boundary conditions of existing positive fixed points is studied for upper semicontinuous set-valued 1-sèt-contractive mapping. In fact, it is a natural conclusion in the cone for the fixed point theorems of upper semicontinuous set-valued 1-set-contractive mapping, and it is a natural extend for positive fixed point theorems of single-valued 1-set-contractive mapping .

Key words: set-valued 1-set-contractive mapping; positive fixed point; cone; Banach space; upper semicontinuity; demicompact

(编辑 吕建斌)

(上接第128页)

Effect and Mechanism of Nitrogen Removal of OGO Process in Municipal Wastewater Treatment

LUO Gu-yuan, WU Shu-yuan, XU Xiao-yi, JI Tie-jun, TANG Gang

(Key Laboratory of Three Gorges Reservoir Region's Eco – Environment Under the State Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Nitrogen removal efficiency in the OGO reactor was studied based the improved OGO reactor, and the test water was simulated municipal wastewater, further study has been done to analyze the nitrogen removal mechanism of the OGO system through analyzing the nitrogen removal effect in each part of the OGO reactor and observing the activated sludge characteristic in the reactor. When influent total nitrogen (TN) and ammonia nitrogen (NH_4^+-N) are 31.15 ~ 42.26 mg/L and 27.53 ~ 38.58 mg/L respectively, the average removal efficiencies of TN, NH_4^+-N achieve 74.31% and 83.75%. The nitrogen removal in the outer-loop of OGO reactor is achieved by Simultaneous Nitrification and Denitrification (SND). In outer-loop, the nitrogen removal amount is 80.48% of that in the whole reactor. Thus, in OGO reactor, the nitrogen removal mostly depends on SND. Both bioreactor macro-environment and floc microe-environment for SND are existed in OGO system.

Key words: OGO process; removal effect of nitrogen; simultaneous nitrification and denitrification; SND mechanism

(编辑 张小强)